2 семестр

Раньше:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u \\ x(t_0) \in M_0 \\ x(t_1) \in M_1 \\ J = t_1 - t_0 \to \min\limits_{u(\cdot) \in D_U} \end{cases}$$

② $[t_0, t_1] = \bigcup\limits_{i=1}^{s} [t_i, t_{i+1}]$

$u_i(t)$ - допуст. на $[t_i, t_{i+1}]$

$u(t) = u_i(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$ - допустимое. склейка

③ $u(t)$ - допуст. на $[t_0, t_1]$

$v(t) = u(t-\alpha)$ - допуст. на $[t_0+\alpha, t_1+\alpha]$ - сдвиг

(1-3) - требования к классу D_U

С какими классами будем работать?

I. D - кусочного функц

II. D - кусочно-непрерывное слева

Задача Коши: $\begin{cases} \dot{x} = f(x, u(t)) = F(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

Теорема (Т!) (Коши)

1. $F(x,t)$ непр. по совокупности перем. в $\Pi = \{|x-x_0| \le a, |y-y_0| \le b\}$ $\Rightarrow$ Т.
2. $|F(x,t) - F(y,t)| \le L|x-y|$ $\Rightarrow$!

$\Rightarrow \exists h > 0$: в (t_0-h, t_0+h) Т! решение (абс. непр. ф-ция)

Теорема (Каратеодори)

1. $F(x,t)$ измерима по t $\forall x$ в некоторой Π.
2. $F(x,t)$ непр. по x $\forall t$ (одна п.в. t). в Π.
3. $|F(x,t)| \le m(t)$ - измер. ф-ция

тогда существует решение

4. $|F(x,t) - F(y,t)| \le l(t)|x-y|$, $l(t)$ - измер. ф-ция

тогда решение единственно

Требования:

1. $f(x,u)$ - непр. по совокупности переменных на $E^n \times U$

2. $\frac{\partial f}{\partial x} = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \cdot f_{ij} \right\}_{n}^{n}$ (все кусочно-непр.) - непр. по совок. переменным в $E^n \times V$

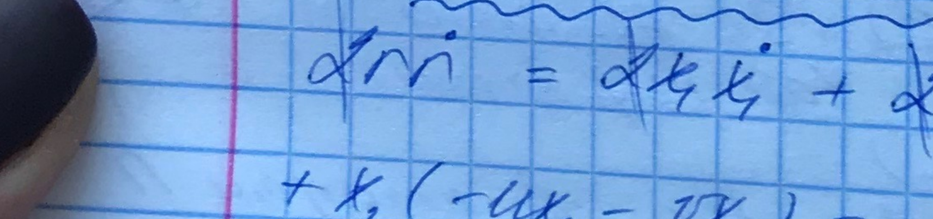
и $\left(\frac{\partial f^0}{\partial x}\right)$ - тоже $\nearrow$

(1) $\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \\ J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x,u)\,dt \to \min\limits_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \end{cases}$

t_0 - фикс.
t_1 - свобод

$X(t) = \{ y \in E^n : \frac{\partial x}{\partial s} = f(x(s), u(s)),\ \overline{0 \le s \le t},\ y = x(t),\ \forall u(\cdot) \in \mathcal{U} \}$ - мн-во достижимост

так было



Γ_4 - разделяющая гиперплоскость

$\begin{cases} \dot{\psi} = -A^T \psi \\ \psi(t_1) = \xi \\ x(t_1) \in \partial X(t_1) \end{cases}$ сейчас не так

Пример (билинейная система)

(*) $\begin{cases} \dot{x}_1 = u x_2 - v x_1, & x_1(0) = 1, \ x_1(T) = -1 \\ \dot{x}_2 = -u x_1 - v x_2, & x_2(0) = 0, \ x_2(T) = 0 \end{cases}$, $T \to \min\limits_{(u,v) \in \mathcal{U}}$

$\dot{x} = A(x) \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} x_2 & -x_1 \\ -x_1 & -x_2 \end{pmatrix}$ $\mathcal{U} = \begin{cases} |u| \le 1 \\ |v| \le 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = r(t)\cos\varphi(t) \\ x_2 = r(t)\sin\varphi(t) \end{cases}$, $r(t) \ge 0$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = r^2(t)$ $\left(\frac{d}{dt}\right)$

$2r\dot{r} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \overset{(*)}{=} x_1(ux_2 - vx_1) +$

$+ x_2(-ux_1 - vx_2) = ux_1x_2 - vx_1^2 - ux_1x_2 - vx_2^2 =$

$= -v(x_1^2 + x_2^2) = -vr^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = -vr \\ r(0) = 1 \end{cases}$

$$\dot{x}_2 = \frac{d}{dt}(r\sin\varphi) = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} =$$
$$= -v\sin\varphi + r\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$\dot{x}_2 = -ux_1 - vx_2 = -ur\cos\varphi - vr\sin\varphi$$

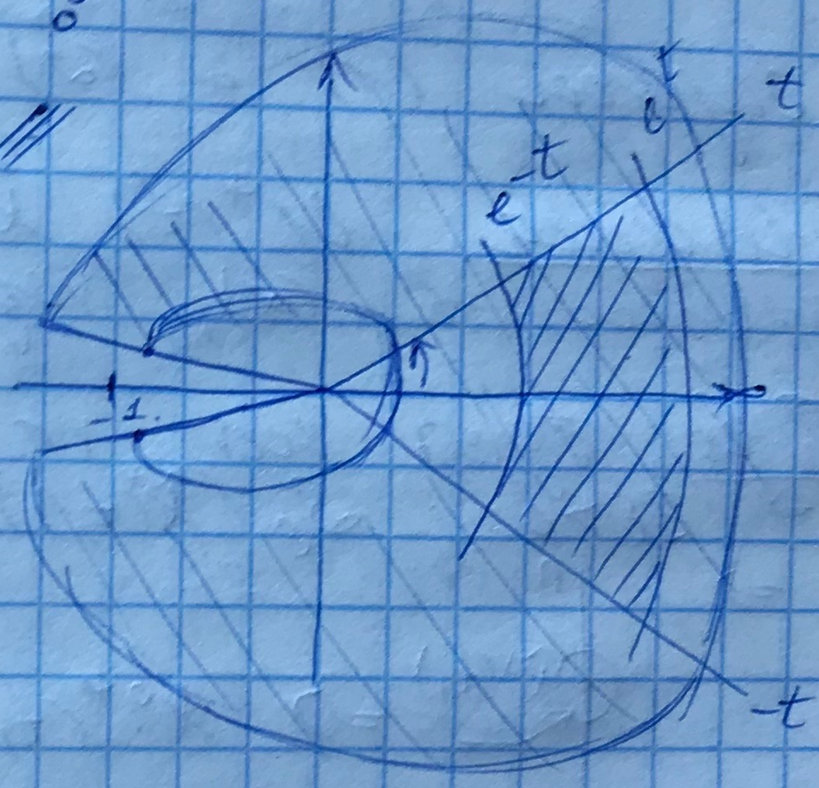
$$\Rightarrow \{\cos\varphi \neq 0\} \Rightarrow \begin{cases}\dot{\varphi} = -u \\ \varphi(0) = 0\end{cases}$$

Если в нек. точке $\cos\varphi = 0$, можно сделать с ~~помощью~~ u ~~нуль~~ ~~предельный~~ так, чтоб $\sin\varphi \neq 0$

$$\begin{cases}\dot{r} = -vr \\ \dot{\varphi} = -u \\ r(0) = 1 \\ \varphi(0) = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}r(t) = e^{-\int_0^t v(s)ds} \\ \varphi(t) = -\int_0^t u(s)ds\end{cases}$$

Проверим 1) $0 < t < \pi/2$ ///

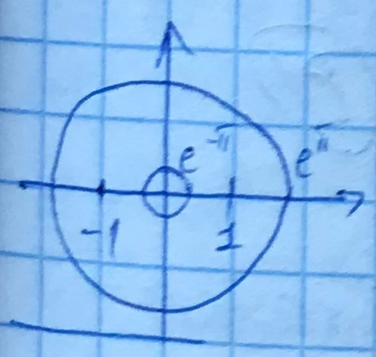
$$v \Rightarrow \begin{matrix}-t \le \varphi \le t \\ e^{-t} \le r \le e^{t}\end{matrix}$$



2) $t < \pi - \varepsilon$ ///

3) $t = \pi$ $\quad -\pi \le \varphi \le \pi$

$$e^{-\pi} \le r \le e^{\pi}$$



Проблемы: 1) точка во внутренности
2) мн-во не выпукло

Решаем $\dot{x} = f(x,u)$ в E^{n+1}

$$\begin{cases}\dot{t}^0 = f^0(x,u) \\ \dot{x} = f(x,u) \\ x(t_0) = x_0 \\ x^0(t_0) = 0\end{cases}$$

Введем $\tilde{x} = \begin{pmatrix} t^0 \\ x \end{pmatrix}$

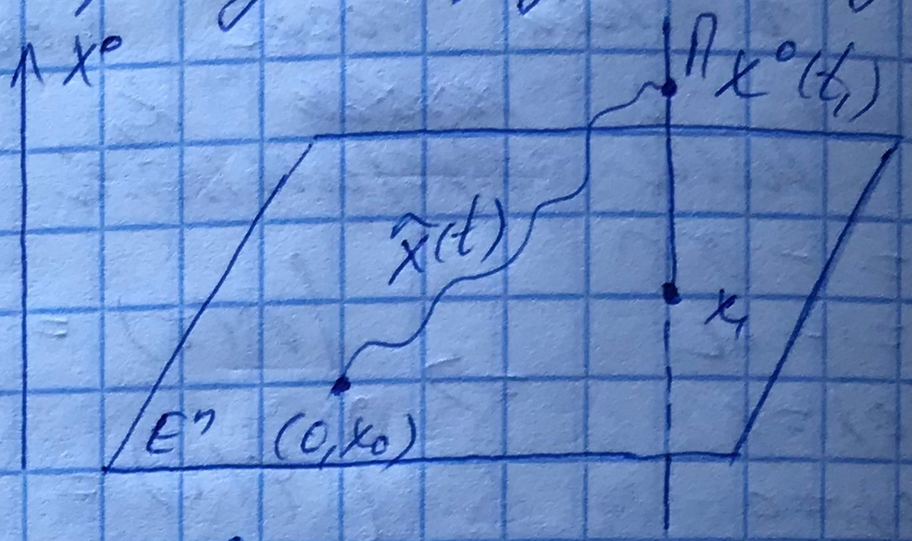
$$\tilde{f}(\tilde{x},u) = \begin{pmatrix} f^0(x,u) \\ f(x,u)\end{pmatrix} = \tilde{f}(\tilde{x},u)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}, u) \\ \tilde{x}(t_0) = (x_0^0) \\ \tilde{x}(t_1) = \begin{pmatrix} \xi \\ x_1 \end{pmatrix}, \ \xi \in E^n \\ J = x^0(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(s), u(s))\,ds \end{cases}$$

$\Pi = \{ \tilde{y} \in E^{n+1} : \tilde{y} = \begin{pmatrix} \xi \\ x_1 \end{pmatrix}, \xi \in E^n \}$ J – прямая, параллельная оси x^0 и проходящая через точку (x_1^0)

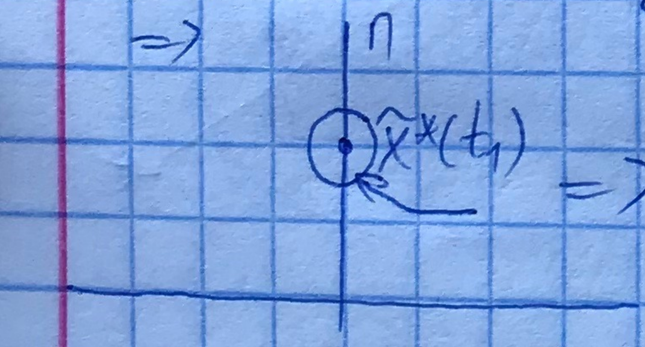
(2) $\Rightarrow$
$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}, u) \\ \tilde{x}(t_0) = (x_0^0) \\ \tilde{x}(t_1) \in \Pi \\ x^0(t_1) \to \min\limits_{u(\cdot) \in U} \end{cases}$$



Задачи (1) и (2) эквивалентны

Замечание. $u^*(t)$, $\tilde{x}^*(t)$ – оптимальный процесс в (2), тогда $\tilde{x}^*(t_1) \in \partial \tilde{x}(t)$.

Д-во: Пусть нет, т.е. $\tilde{x}^*(t_1) \in \operatorname{Int} \tilde{x}(t) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : S_\varepsilon(\tilde{x}^*(t_1)) \subset \tilde{x}(t_1) \Rightarrow$



$\Rightarrow x^{0*}(t_1) - \varepsilon \in \tilde{x}(t_1) \Rightarrow$ (?!)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$ Предполагаем, что $f(x,u)$ обладает условиями ограниченности:

(α): $\|f(x,u)\| \le A\|x\| + B \quad \forall u \in U \quad A, B > 0$

(β): $(x, f(x,u)) \le A\|x\|^2 + B, \ \forall u \in U, \ A, B > 0$

$(\alpha) \Rightarrow (\beta)$: $(x, f(x,u)) \le \|x\| \cdot \|f(x,u)\| \overset{(\alpha)}{\le} A\|x\|^2 + B\|x\| \le$
$\le \{ \|x\| \le \|x\|^2 + 1 \} \le (A+B)\|x\|^2 + B$ – условие (β)

Лемма (Гронуолла – Беллмана)

Пусть $x(t)$ – непр. на $[t_0, t_1]$

$\|x(t)\| \le P + Q\int_{t_0}^{t} \|x(s)\|\,ds$, $P, Q \ge 0$, $\forall t \in [t_0, t_1]$

Тогда $\|x(t)\| \le P e^{Q(t-t_0)}$

Д-во $M = \max_{[t_0,t_1]} \|x(t)\|$

$\|x(t)\| \le P + Q\int_{t_0}^{t} \|x(s)\|\,ds \le P + Q\int_{t_0}^{t} M\,ds \le P + QM(t-t_0)$

еще раз:

$\|x(t)\| \le P + Q\int_{t_0}^{t} [P + QM(s-t_0)]\,ds = P + PQ(t-t_0) + Q^2M\frac{(t-t_0)^2}{2!}$

еще раз:

$\|x(t)\| \le P + Q\int_{t_0}^{t} [P + PQ(s-t_0) + Q^2M\frac{(s-t_0)^2}{2!}]\,ds = P + PQ(t-t_0) + PQ^2\frac{(t-t_0)^2}{2!} + Q^3M\frac{(t-t_0)^3}{3!}$

потом N-ое число:

$\|x(t)\| \le P + PQ(t-t_0) + PQ^2\frac{(t-t_0)^2}{2!} + PQ^3\frac{(t-t_0)^3}{3!} + \dots + PQ^N\frac{(t-t_0)^N}{N!} + \dots + Q^{N+1}M\frac{(t-t_0)^N}{N!} \to$

$\xrightarrow[N\to\infty]{} Pe^{Q(t-t_0)}$

$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x(s), u(s))\,ds$

$\|x(t)\| \le \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|f(x(s), u(s))\|\,ds \le \{\text{условие } \sup\text{-ом } (\alpha)\} \le$

$\le \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} (A\|x(s)\| + B)\,ds \le \underbrace{\|x_0\| + B(t_1 - t_0)}_{P} + \underbrace{A}_{Q}\int_{t_0}^{t_1} \|x(s)\|\,ds$

по лемме получаем, что траектории равномерно ограничены (*)

А если у нас условие (β)?

$\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 = \frac{d}{dt}(x(t), x(t)) = 2(\dot{x}, x) = 2(x, f(x,u)) \le$

$\le 2A\|x\|^2 + 2B$

$\|x(t)\|^2 = \|x_0\|^2 + \int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}\|x(s)\|^2\,ds \le \|x_0\|^2 + \int_{t_0}^{t} (2A\|x(s)\|^2 + 2B)\,ds \le$

$\le \|x_0\|^2 + 2B(t_1 - t_0) + 2A\int_{t_0}^{t} \|x(s)\|^2\,ds \Rightarrow$ по лемме сделано

Условие огр-ти $\Rightarrow x(t)$ р-но ограничено

$\overline{U} \in \Omega(E^n) \Rightarrow \begin{matrix} f(x,u) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,u) \end{matrix}\Big\}$ р-но ограничена

Теорема 1 $\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ Пусть $\overline{U} \in \Omega(E^n)$ и выполн. (α) или (β)

$t \in [t_0, t_1]$

$\Rightarrow \overline{X(t)} \in \Omega(E^n)$ - непрерывное многозн. отобр.

Д-во: (α) $\left.\begin{matrix} |X(t)| \le \text{const} \\ \overline{X(t)} - \text{замкн.} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{X(t)} \in \Omega(E^n)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall t' \in [t_0, t_1] \quad \forall \rho_1 \in \overline{X(t')} \quad \exists x(t):$

$|\rho_1 - x(t')| \le \varepsilon/2$

$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), u(s))\,ds \Rightarrow$

$\Rightarrow \|x(t) - x(t')\| \le \left| \int_{t'}^{t} \|f(x(s), u(s))\|\,ds \right| \le m \cdot |t - t'|$

$\exists \delta > 0: \forall |t - t'| < \delta: \quad \|x(t) - x(t')\| \le \varepsilon/2$

$\|x(t) - \rho_1\| \le \|x(t) - x(t')\| + \|x(t') - \rho_1\| \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \rho_1 \in \overline{X(t')} \quad \exists \rho_2 \in X(t) \subset \overline{X(t)}: \|\rho_1 - \rho_2\| < \varepsilon,$ если $|t - t'| < \delta$.

т.е. $\overline{X(t')} \subset \overline{X(t)} + S_\varepsilon(0)$

в силу симметрии t и t': $\overline{X(t)} \subset \overline{X(t')} + S_\varepsilon(0)$

А это и есть непрерывность многозначная.

Опр. $F(t)$ непр. в т. t_0 если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$: $\forall t: |t - t_0| < \delta \quad h(F(t), F(t_0)) < \varepsilon$, где $h(\cdot,\cdot)$ - расстояние Хаусдорфа.

Теорема 2 Пусть $\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ Пусть $U \in \Omega(E^n)$ (α) или (β)

и пусть $F(x) = f(x, U) = \{z \in E^n \mid z = f(x,u), u \in U\}$ - выпукло.

Тогда $X(t) = \overline{X(t)}$, т.е. $X(t)$ замкнуто. (компакт)

Замечание: $F(x)$ - ограничено и замкнуто из предыдущих условий. Замкнутость из непрерывности $f(x,u)$.

Теорема 3 Пусть дана задача быстродействия:
$\dot{x} = f(x,u)$, $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, $t_1 - t_0 \to \inf$

Пусть 1. $U \in \Omega(E^r)$
2. (α) или (β)
3. $f(x,U) \in conv\,\Omega(E^n)$
4. $\exists T > 0$ на $[t_0, T]$ система управляема

Тогда $\exists$ оптимальное решение задачи.

Д-во: $t_* = \inf\{t : t > t_0$ на $[t_0, t]$ система упр-ма$\}$
$T^k \to t_* + 0$ $\quad \forall \varepsilon > 0$ $\exists k$: $\forall\, k > k$
$h(X(T^k), X(t_*)) < \varepsilon$
$x_1 \in X(T^k) \subset X(t_*) + S_\varepsilon(0)$
пусть $m = 1, 2, 3, \ldots$ $\quad \varepsilon_m = 1/m$
$x_1 \in X(t_*) + \frac{1}{m} S_1(0)$, $\quad x_1 = \xi^m + \frac{1}{m}\psi^m$
$\xi^m \in X(t_*)$, $\quad \|\psi^m\| \le 1$, $\quad \xi^m \to \xi^* \in X(t_*)$.
(выбираем её п/п, т.к. X - компакт)
Сделаем пред. переход: $(m \to \infty)$
$x_1 = \xi^* \in X(t_*)$.

Пусть Ω_U - класс кусочно-непр. слева на $[t_0, t_1]$ функций.
τ: $u(\tau) = u(\tau - 0)$
$u(t)$ непр на $[t_0, t]$
$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u(t)) = \varphi(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$
$\exists\, x(t)$.
$\exists \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ - непрерывна по совокупн. перем.
$\exists \frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}$

$\exists \varepsilon > 0$: $\begin{cases} \dot{x} = \varphi(x,t) \\ x(t_0) = \xi \end{cases}$ $\quad \|\xi - x_0\| \le \varepsilon$, $\quad t \in [t_0, t_1]$
Она диффер и непр по совок.
Имеем $x(t, \xi, t_0)$: $x(t_0, \xi, t_0) = \xi$.
Наш больший $x(t) \equiv x(t, x_0, t_0)$
разложим по параметру:
$x(t, \xi, t_0) = x(t, x_0, t_0) + \frac{\partial x(t, x_0, t_0)}{\partial \xi}(\xi - x_0) + \bar{o}(\|\xi - x_0\|)$
$\xi = x_0 + \varepsilon h + \bar{o}(\varepsilon)$ - дадим возмущение во время t_0.
$\frac{\partial}{\partial t}[x(t, x_0 + \varepsilon h + \bar{o}(\varepsilon), t_0) - x(t, x_0, t_0)] = \frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial x}{\partial \xi}(t, x_0, t_0)h\varepsilon + \bar{o}(\varepsilon) =$ - верим
{с др. стороны} $= \dot{x}(\ldots) - \dot{x}(\ldots) =$

$= \varphi(x(t, x_0 + \varepsilon h + \bar{o}(\varepsilon), t_0), t) - \varphi(x(t, x_0, t_0), t) =$

$= \varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t, x_0, t_0), t) \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi}(t, x_0, t_0) \cdot h + \bar{o}(\varepsilon)$

Обозначим $y = \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot h$

Получим:

$\varepsilon \dot{y} = \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t, x_0, t_0), t) y + \bar{o}(\varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \dot{y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t, x_0, t_0), t) y \\ y(t_0) = h \end{cases}$

$\begin{cases} x(t_0, \xi, t_0) = \xi \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial \xi}{\partial \xi} = E \text{ (единичная матрица)} \\ \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial \xi}(t_0, \xi, t_0) h = Eh = h \end{cases}$

Оператор $A: h \to y(t)$, т.е. $y(t) = A_{tt_0} h$

$u(t)$, $x(t)$:

$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

(*) $\dot{y} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t)) y$ — ур-ние в вариациях

(**) $\dot{\psi} = -\left(\frac{\partial A}{\partial x}(x(t), u(t))\right)^* \psi$ — сопряженное ур-ние

$x_0 + \varepsilon h + \bar{o}(\varepsilon) \Rightarrow \tilde{x}(t) = x(t) + \varepsilon \cdot y(t) + \bar{o}(\varepsilon)$

Лемма Пусть $y(t)$ – ф решение ур-ния в вариациях, $\psi(t)$ – ф решение сопр. ур-ния. Тогда $(y(t), \psi(t)) = \text{const}$.

A – линейный, непер оператор – решение ур-ния в вариациях

$A_{tt_0} h = h$ – тождественный

$t > s > \tau$, $t, s, \tau \in [t_0, t_1]$: $A_{ts} \circ A_{s\tau} h = A_{t\tau} h$

Д-во: $\frac{d}{dt}(y(t), x(t)) = (\dot{y}, x) + (y, \dot{x}) =$

$= (\frac{\partial f}{\partial x} y, x) + (y, -(\frac{\partial f}{\partial x})^* x) = (\frac{\partial f}{\partial x} y, x) -$

$- (\frac{\partial f}{\partial x} y, x) \equiv 0$

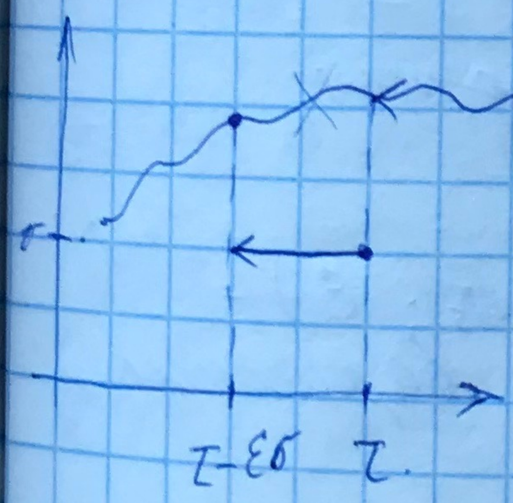
Малое изменение аргумента - приращение
Малое изменение функции - вариация

Вспоминаем вар. исчисление:
$|f^*(t) - f(t)| \le \varepsilon$, $t \in [t_0, t_1] \Rightarrow f^*(t)$ - вариация

Вариации Макшейна

Мы в классе кусочно-непр. функций.
$\tau \in (t_0, t_1)$ - точка непрерывности управления
$\sigma \ge 0$, $v \in V$, $\varepsilon > 0$ - параметры

Вариация $u^*(t) = \begin{cases} u(t), & t \notin (\tau - \varepsilon\sigma, \tau) \\ v, & t \in (\tau - \varepsilon\sigma, \tau) \end{cases}$



$u^*(t)$ - возмущённое упр-ние, получен. с помощью одноточечной вариации Макшейна $M(\tau, \sigma, \cdot, \cdot)$

Для $u^*(t)$ получим $x^*(t)$.

Нас интересует $x^*(t) - x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$

$u^*(t) \equiv u(t)$, $t \in [t_0, \tau - \varepsilon\sigma] \Rightarrow x^*(t) \equiv x(t)$

$x^*(t) = x^*(\tau - \varepsilon\sigma) + \int_{\tau-\varepsilon\sigma}^{t} f(x^*(s), u^*(s))ds$, $t \in (\tau - \varepsilon\sigma, \tau)$

$x(t) = x(\tau - \varepsilon\sigma) + \int_{\tau-\varepsilon\sigma}^{t} f(x(s), u(s))ds$

$\Rightarrow x^*(\tau) - x(\tau) = \int_{\tau-\varepsilon\sigma}^{\tau} [f(x^*(t), v) - f(x(t), u(t))]dt$

$f(x^*(t), v) = f(x^*(\tau), v) + \alpha(\varepsilon)$ $\quad \alpha(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$

$f(x(t), u(t)) = f(x(\tau), u(\tau)) + \alpha'(\varepsilon)$

$x^*(\tau) - x(\tau) = \int_{\tau-\varepsilon\theta}^{\tau} [f(x^*(t), v) - f(x(t), u(t)) + \alpha(\varepsilon)]\,dt =$

$= \varepsilon\theta [f(x^*(\tau), v) - f(x(\tau), u(\tau))] + \underline{\alpha(\varepsilon)\varepsilon\theta} \quad (=)$

$\bar{o}(\varepsilon)$

f - непр. по совок. перем. $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x^*(\tau), v) = f(x(\tau), v) + \alpha(\varepsilon) \quad \Rightarrow$

$(=)\ \varepsilon\theta [f(x(\tau), v) - f(x(\tau), u(\tau))] + \bar{o}(\varepsilon)$

$x^*(\tau) - x(\tau) = \varepsilon h + \bar{o}(\varepsilon), \quad h = \theta [f(x(\tau), v) - f(x(\tau), u(\tau))]$

$x^*(t_1) - x(t_1) = \varepsilon y(t_1) + \bar{o}(\varepsilon), \quad$ где

$y(t_1) = A_{t_1,\tau} h$ - решение уравнения в вариациях

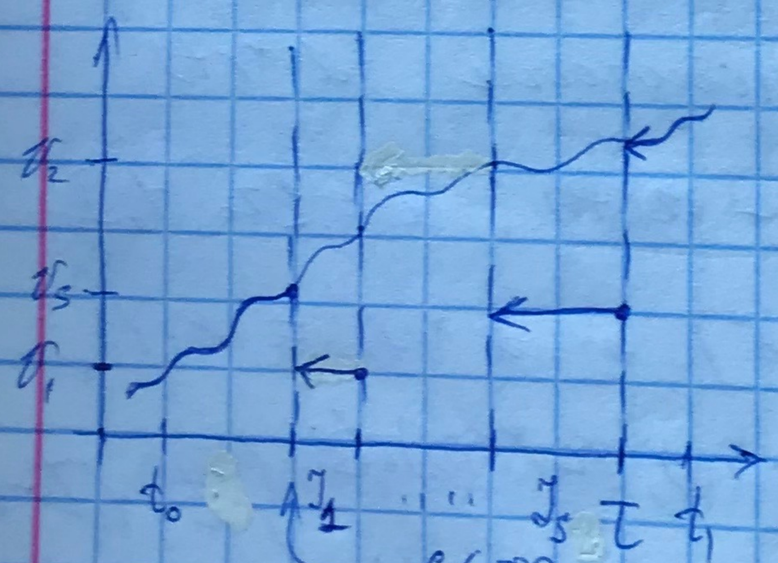
$\dot{y} = -\dfrac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} y$

$y|_{t=\tau} = \theta [f(x(\tau), v) - f(x(\tau), u(\tau))]$

Пусть теперь τ - точка кусочн. упрощ.

$\theta_1, \dots, \theta_s \geq 0, \quad v_1, \dots, v_s \in V, \quad \varepsilon > 0.$

Пусть что такое $M(\tau; \theta_1, \dots, \theta_s; v_1, \dots, v_s; \varepsilon)$ - множество вариации



$\leftarrow$ ф-ция $u^*(t)$.

$|\tau_i| = \varepsilon\theta_i$

$x^*(\tau - \varepsilon(\theta_2 + \dots + \theta_s)) - x(\tau - \varepsilon(\theta_2 + \dots + \theta_s)) = \{\text{ужно знать}\} =$

$= \varepsilon\theta_1 [f(x(\tau - \varepsilon(\theta_2 + \dots + \theta_s), v_1) - f(x(\tau - \varepsilon(\theta_2 + \dots + \theta_s,$

$u(\tau - \varepsilon(\theta_2 + \dots + \theta_5))] + \bar{\bar{o}}(\varepsilon)$ $\Leftarrow$

$f(x(\tau - \varepsilon(\dots)), v_1) = f(x(\tau), v_1) + \alpha(\varepsilon)$

$f(x(\tau - \varepsilon(\dots)), u(\tau - \varepsilon(\dots))) = f(x(\tau), u(\tau)) + \alpha(\varepsilon)$

$\Leftarrow \mathcal{E}\theta_1[f(x(\tau), v_1) - f(x(\tau), u(\tau))] + \bar{o}(\varepsilon) = \mathcal{E}\xi_1 + \bar{o}(\varepsilon)$

$x^*(\tau - \mathcal{E}(\theta_3 + \dots + \theta_5)) - x(\tau - \mathcal{E}(\theta_3 + \dots + \theta_5)) = \mathcal{E}\xi_1 + \bar{o}(\varepsilon) +$

$+ \int_{\tau - \varepsilon(\theta_3 + \dots + \theta_5)}^{\tau - \varepsilon(\theta_2 + \dots + \theta_5)} [f(x^*(s), v_2) - f(x(s), u(s))]\,ds =$

$= \mathcal{E}\xi_1 + \bar{\bar{o}}(\varepsilon) + \int [f(x^*(\tau - \varepsilon(\theta_3 + \dots + \theta_5)), v_2) -$

$- f(x(\tau - \varepsilon(\theta_3 + \dots + \theta_5)), u(\tau - \varepsilon(\theta_3 + \dots + \theta_5))) + \alpha(\varepsilon)]\,ds =$

$= \mathcal{E}\xi_1 + \bar{\bar{o}}(\varepsilon) + \mathcal{E}\theta_2[f(x^*(\tau - \varepsilon(\theta_3 + \dots + \theta_5)), v_2) -$

$- f(x(\tau - \varepsilon(\theta_3 + \dots + \theta_5)), u(\tau - \varepsilon(\theta_3 + \dots + \theta_5)))] + \bar{o}(\varepsilon)$ $\Leftarrow$

$x^*(\dots) = x(\dots) + \alpha(\varepsilon) \Rightarrow \{f \text{ непр}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x^*(\dots), v_2) = f(x(\dots), v_2) + \alpha(\varepsilon)$

$\Leftarrow \mathcal{E}\xi_1 + \bar{\bar{o}}(\varepsilon) + \mathcal{E}\theta_2[f(x(\tau), v_2 - f(x(\tau), u(\tau)] = \mathcal{E}(\xi_1 + \xi_2) + \bar{\bar{o}}(\varepsilon)$

Продолжаем дальнейшие шаги. Получим:

$x^*(t) - x(\tau) = \mathcal{E}\xi + \bar{\bar{o}}(\varepsilon), \quad \xi = \sum_{i=1}^{s} \theta_i \xi_i$

$x^*(t_1) - x(t) = \mathcal{E} A_{t,\tau}\,\xi + \bar{\bar{o}}(\varepsilon)$

Отпустим τ на волю, как будем теперь $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_r \equiv \tau$ будем рассматривать

$M_1(\tau_1; \theta_1^1, \dots, \theta_{s_1}^1; v_1^1, \dots, v_{s_1}^1; \varepsilon)$

$\dots$

$M_r(\tau_r; \theta_1^r, \dots, \theta_{s_r}^r; v_1^r, \dots, v_{s_r}^r, \varepsilon)$.

$M = M_r \circ \dots \circ M_1$ — многочленная вариация вакцинации

Для начала рассмотрим $M = M_2 \circ M_1$

M_1: $x^*(\tau_1) - x(\tau_1) = \varepsilon\xi_1 + \bar{\bar{o}}(\varepsilon)$

M_2: $x^*(\tau_2) - x(\tau_2) = \varepsilon\xi_2 + \bar{\bar{o}}(\varepsilon)$

$\Rightarrow M_2 \circ M_1$: $x^*(\tau_2) - x(\tau_2) = \varepsilon(A_{\tau_2\tau_1}\xi_1 + \xi_2) + \bar{\bar{o}}(\varepsilon)$

Как получили?

$x^*(\tau_2 - \varepsilon(\sigma_1^2 + \dots + \sigma_{\xi_2}^2)) - x(\tau_2 - \varepsilon(\sigma_1^2 + \dots + \sigma_{\xi_2}^2)) =$

$= A_{\tau_2 - \varepsilon(\dots)\tau_1}\xi_1 + \bar{\bar{o}}(\varepsilon) = \varepsilon A_{\tau_2\tau_1}\xi_1 + \bar{\bar{o}}(\varepsilon)$

↑ из непр-ти оп-ра A.

$x^*(\tau_2) - x_{\tau_2}(\tau_2) = x^*(\tau_2 - \varepsilon(\dots)) - x(\tau_2 - \varepsilon(\dots)) +$

$+ \int_{\tau_2 - \varepsilon(\dots)}^{\tau_2} [f(x^*, u^*) - f(x, u)]\,dt = \varepsilon A_{\tau_2\tau_1}\xi_1 + \varepsilon\xi_2 + \bar{\bar{o}}(\varepsilon)$

Обобщение: $M_n \circ \dots \circ M_1$:

$x^*(\tau_n) - x(\tau_n) = \varepsilon(A_{\tau_n\tau_1}\xi_1 + A_{\tau_n\tau_2}\xi_2 + \dots + A_{\tau_n\tau_{n-1}}\xi_{n-1} + \xi_n) + \bar{\bar{o}}(\varepsilon)$

Вообще: $\forall$ вариационного объекта M:

$x^*(\tau) - x(\tau) = \varepsilon\xi + \bar{\bar{o}}(\varepsilon)$, ξ – некоторая

$x^*(t_1) - x(t_1) = \varepsilon A_{t_1\tau}\xi + \bar{\bar{o}}(\varepsilon) = \varepsilon\varphi(M) + \bar{\bar{o}}(\varepsilon)$

$K = \bigcup_M \{\varphi(M)\}$ – <u>конус касательных направлений к мн-ву достижимости $X(t_1)$ в точке $x(t_1)$.</u>

<u>Опр.</u> мн-во M нач-ся конусом с вершиной в точке O, если наряду с точкой $a \in M$ мн-во содержит весь луч $\overline{Oa}$.

<u>Лемма</u> K – выпуклый конус с вершиной в 0 куча.

$M + E^n \Rightarrow O \in \partial M$

Надо бы ввести операции на мн-ве вариаций движения

⊕ Сложение

$M(\tau; \sigma; v; \varepsilon)$
$M'(\tau; \sigma'; v'; \varepsilon)$

$$M + M' = \begin{cases} M(\tau; \sigma, \sigma'; v, v'; \varepsilon, & \tau = \tau' \\ M \circ M', & \tau < \tau' \\ M' \circ M, & \tau' < \tau \end{cases}$$

$M + M'$: а) $\tau = \tau'$

$x^*(\tau) - x(\tau) = \mathcal{E}(\xi + \xi') + \bar{o}(\varepsilon)$

$x^*(t_1) - x^*(t_0) = \mathcal{E}(\varphi(M + M')) + \bar{o}(\varepsilon) =$

$= \mathcal{E} A_{t,\tau}(\xi + \xi') + \bar{o}(\varepsilon) =$

$= \mathcal{E}(A_{t,\tau}\xi + A_{t,\tau}\xi') + \bar{o}(\varepsilon) = \mathcal{E}(\varphi_t(M) + \varphi(M')) + \bar{o}(\varepsilon)$

$\Rightarrow \varphi(M + M') = \varphi(M) + \varphi(M')$

б) $x^*(\tau) - x(\tau') = \mathcal{E}(A_{\tau'\tau}\xi + \xi') + \bar{o}(\varepsilon)$

$x^*(t_1) - x(t_0) = \mathcal{E}(A_{t,\tau}\xi + A_{t,\tau'}\xi') + \bar{o}(\varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(M + M') = \varphi(M) + \varphi(M')$

⊕ Сложение

$M(\tau; \sigma_1, \dots, \sigma_s; v_1, \dots, v_s; \varepsilon)$
$M'(\tau'; \sigma_1', \dots, \sigma_s'; v_1', \dots, v_s'; \varepsilon)$

$$M + M' = \begin{cases} M(\tau; \sigma_1, \sigma_1', \dots, \sigma_s, \sigma_s', v_1, v_1', \dots, v_s, v_s'; \varepsilon), & \tau = \tau' \\ M' \circ M & \tau < \tau' \end{cases}$$

Аналогично $\varphi(M + M') = \varphi(M) + \varphi(M')$

$M = M_r \circ \dots \circ M_2 \circ M_1 = M_1 + M_2 + \dots + M_r$

А если $M = M_1 + \dots + M_s$, $M' = M_1' + \dots + M_s'$

$\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_s$

Чтобы синхронизировать прошлое (конкретно τ) моменты управления σ_i, они могут быть любыми

$M + M' = (M_1 + M_1') + (M_2 + M_2') + \dots + (M_s + M_s')$

$\varphi(M_i + M_i') = \varphi(M_i) + \varphi(M_i') \Rightarrow \varphi(M + M') = \varphi(M) + \varphi(M')$

Теорем

(*) Дифференцирование на гладком

$M = (\tau; \sigma; v; \varepsilon)$ $\quad \lambda \geq 0$

$\lambda M = (\tau; \lambda\sigma; v; \varepsilon)$

$x^*(\tau) - x(\tau) = \varepsilon(\lambda\sigma)[\dots] + \bar{o}(\varepsilon)$

$x^*(t_1) - x(t_1) = \varepsilon\lambda\varphi(M) \Rightarrow \quad \varphi(\lambda M) = \lambda\varphi(M)$

$M = (\tau; \sigma_1, \dots, \sigma_s; v_1, \dots, v_s; \varepsilon)$ $\quad \lambda \geq 0$

$\lambda M = (\tau; \lambda\sigma_1, \dots, \lambda\sigma_s; v_1, \dots, v_s; \varepsilon)$

$M = M_1 \overset{(+)}{\circ} \dots \overset{(+)}{\circ} M_1 \Rightarrow \lambda M = (\lambda M_1) \overset{(+)}{\circ} \dots \overset{(+)}{\circ} (\lambda M_1)$

Д-во теоремы

$a, b \in K \subset E^n$ $\quad \alpha, \beta \geq 0$

$a \to M$, $\quad a = \varphi(M)$

$b \to M'$, $\quad b = \varphi(M')$

$\alpha a = \alpha\varphi(M) = \varphi(\alpha M) \Rightarrow \alpha a \to \alpha M \Rightarrow$ конус

$\alpha a + \beta b = \alpha\varphi(M) + \beta\varphi(M') = \varphi(\alpha M + \beta M') \Rightarrow$ выпуклый

Расширенная вариация класса

$M, \alpha \in E^1$

M: $x^*(t_1) - x(t_1) = \varepsilon\varphi(M) + \bar{o}(\varepsilon)$

$t_1^* = t_1 + \varepsilon\alpha$, $\quad u^*(t)$

$\alpha > 0 \Rightarrow u^*(t) \equiv u(t_1)$, $\quad t \in (t_1, t_1 - \varepsilon\alpha]$

$\alpha < 0 \to u^*(t) \equiv u(t)$, $\quad t \in (t_1 + \varepsilon\alpha, t_1]$

Зачем это делали? У нас не свободный конец t_1, мы его не знаем и не держим

$$x^*(t) = x^*(t_1) + \int_t^{t} f(x^*(t), u^*(t))\,dt = x^*(t_1) + (t - t_1) f(x^*(t_1), u(t_1)) + \bar{o}(\varepsilon)$$

$$x^*(t_1^*) = x^*(t_1) + \varepsilon\alpha f(x^*(t_1), u(t_1)) + \bar{o}(\varepsilon) =$$

$= x^*(t_1) + \varepsilon\alpha(f(x(t_1), u(t_1)) + \alpha(\varepsilon)) + \bar{o}(\varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow x^*(t_1^*) = x(t_1) + \varepsilon(\psi(M) + \alpha f(x(t_1), u(t_1))) + \bar{o}(\varepsilon)$

$V(M, \alpha)$ – *расширение вариации*

$\psi(V(M,\alpha)) = \psi(M) + \alpha f(x(t_1), u(t_1))$

$\tilde{K} = \bigcup_{V(M,\alpha)} \{\psi(V(M,\alpha))\}$ – *расширенный конус касательных направлений к мн-ву достижимости $X(t_1)$ в точке $x(t_1)$*

Лемма $\tilde{K}$ – *выпуклый конус с вершиной в нуле*

Д-во: Введём: 1) $V(M,\alpha) + V(M',\alpha') = V(M+M', \alpha+\alpha')$

$\psi(V(M+M', \alpha+\alpha')) = \psi(V(M,\alpha)) + \psi(V(M',\alpha'))$

2) $\lambda V(M,\alpha) = V(\lambda M, \lambda\alpha)$, $\lambda \geq 0$

Аналогично, $\tilde{K}$ – *вып. конус.*

Лемма (*о малых деформациях*)

Пусть $f(x): M \to E^n$ – *непр. отображение* $M \in conv\, \Omega(E^n)$ (*вып. компакт*), $int M \neq \emptyset$, $x_0 \in int M$

Выполнено условие: $\|f(x) - x\| \leq \|x - x_0\|$, $\forall x \in \partial M$

Тогда $x_0 \in f(M)$, *т.е.* $\exists x^* \in M$: $f(x^*) = x_0$.

Д-во: 1. *Частный случай:* $M = S_R(0)$, $x_0 = 0$, $R > 0$

$\|f(x) - x\| \leq \|x\|$, $x \in \partial S_R(0)$.

Вспом. оператор проектирования $\varphi(x) = P_M(x - f(x))$

Проекция на M: $x \in M \Rightarrow x \mapsto x$, $x \notin M \Rightarrow x \mapsto y$:

$y \in M$ и $\rho(x,y) = \inf_{z \in M} \rho(x,z) = \rho(x, M)$.

φ – *непрерывное отображение* $\varphi: M \to M$

По т. Брауэра (*у непр. отобр. $\exists$ непод. точка*)

$\exists x^* \in M$: $x^* = \varphi(x^*)$.

1) $x^* - f(x^*) \in int M \Rightarrow x^* = \varphi(x^*) = x^* - f(x^*) \Rightarrow f(x^*) = 0$

2) $x^* - f(x^*) \in \partial M = \partial S_R(0)$, $x^* \in S_R(0)$

$\|x^* - f(x^*)\| \leq \|x^*\| < R$, ~~$x^* - f(x^*) \in M$~~

$\varphi(x^*) = x^* - f(x^*) \Rightarrow f(x^*) = 0$

→

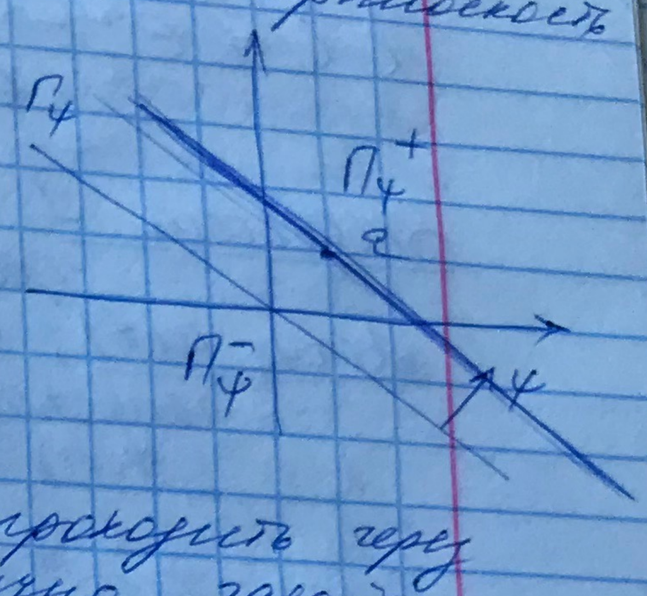
Теорем

2. Общий случай: $M \in conv\Omega(E^n)$, $x_0 \in int M$.
Введём $y = x - x_0$, $M \to M - x_0$ (параллельный перенос)
$x \in \partial M \Leftrightarrow y \in \partial(M - x_0)$, $0 \in int(M - x_0)$
Рассмотрим $\rho(y) = f(y + x_0) - x_0 = f(x) - x_0 : M - x_0 \to E^n$.
$\rho(y)$ – непрерывное отображение
$y \in \partial(M - x_0)$ (т.е. $x \in \partial M$) $\Rightarrow \|f(x) - x\| = \|f(x) - x_0 - (x - x_0)\| \le \|x - x_0\| =$
$= \|\rho(y) - y\| \le \|y\|$
Докажем, что $\exists y^* \in M - x_0 : \rho(y^*) = 0$.
$M - x_0 \in conv\Omega(E^n) \Rightarrow \exists R > 0 : M - x_0 \subset S_R(0)$.
$\bar{y} = h(y) : M - x_0 \to S_R(0)$
$h(y) = \begin{cases} 0, & y = 0 \\ R\alpha \cdot \frac{y}{\|y\|}, & y \neq 0 \end{cases}$ – непр отобр
$\alpha = \min\{t \ge 0 \mid y \in t(M - x_0)\}$
$y \in \partial(M - x_0) \Rightarrow \alpha = 1$
Рассмотрим отображение
$\rho \circ h^{-1} : S_R(0) \to E^n$
$\bar{y} \in S_R(0)$.
$\|\rho \circ h^{-1}\bar{y} - \bar{y}\| = \|\rho(y) - \bar{y}\| \le \|\rho(y) - y\| +$
$+ \|\bar{y} - y\| \le \|y\| + \|\bar{y} - y\| =$ {лежат на одной прямой, $\beta = \|y\|$}
По лемме $\exists \bar{y}^* \in S_R(0) : \rho \circ h^{-1}(\bar{y}^*) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow y^* = h^{-1}(\bar{y}^*) : \rho(y^*) = 0$, $y^* \in M - x_0$.
– непр.
Следствия: 1. $f_\varepsilon(x) : M \to E^n$, $M \in conv\Omega(E^n)$, $int M \neq \emptyset$,
$x_0 \in int M$, $f_\varepsilon(x) - x \underset{\varepsilon \to 0}{\rightrightarrows} 0$ (при $\varepsilon \to 0$), тогда
$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \varepsilon \le \varepsilon_0 \quad x_0 \in f_\varepsilon(M)$.
Д-во: $\exists \varepsilon_0 > 0 : \|f_\varepsilon(x) - x\| \le \beta$, $\forall x \in M$, $\forall \varepsilon \le \varepsilon_0$
Положим $\beta = \min_{x \in \partial M} \|x - x_0\| > 0$.
$\forall x \in \partial M \ \forall \varepsilon \le \varepsilon_0 \quad \|f_\varepsilon(x) - x\| \le \beta \le \|x - x_0\|$
(f_ε – непр отобр-ние) $\Rightarrow$ {лемма} $\Rightarrow x_0 \in f_\varepsilon(M)$

2. $f_\varepsilon(x) : M \to E^n$ – непр отобр., $M \in conv\Omega(E^n)$, $int M \neq \emptyset$.
$P \in \Omega(E^n)$, $P \subset int M$, $f(x) \underset{\varepsilon \to 0}{\rightrightarrows} x$
Тогда $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \varepsilon \le \varepsilon_0 : P \subset f_\varepsilon(M)$.
Д-во: Всё аналогично, но $\beta = \min_{\substack{x \in \partial M \\ x_0 \in P}} \|x - x_0\| > 0$.

$\psi \in E^n$, $\psi \neq 0$. $\Gamma_\psi = \{x \in E^n / (x, \psi) = 0\}$ – гиперплоскость

$\Pi_\psi^+ : (x, \psi) \geq 0$, $\Pi_\psi^- : (x, \psi) \leq 0$

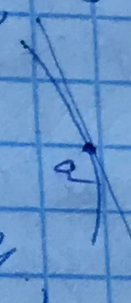


Мн-ва A и B отделимы, если $\exists \psi \neq 0$: $A \subset \Pi_\psi^+$, $B \subset \Pi_\psi^-$

Иначе: $A, B \in \Gamma_\psi$, они всё равно отделимы

Гиперплоскость делит и не проходит через начало координат. Она однозначно задаётся вектором ψ и некоторой точкой a

Пусть K – выпуклый конус, $a \in \partial K$, $\exists \psi \neq 0$: $K \subset \Pi_\psi^-$ (или Π_ψ^+). В таком случае Γ_ψ – опорная гиперплоскость к K в точке a



Оказывается, достаточно просто выпуклости и замкнутости (отсутствия от отрицания) K, что бы для Γ_ψ строилась. $\psi = b^* - b$, где $b^* = \min_{x \in K} \|b - x\|$

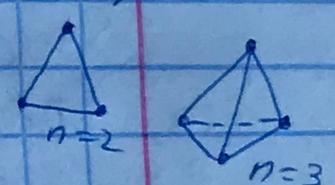
Пусть есть $n+1$ точка $a_0, \dots, a_n$, $a_i \in E^n$, $i = \overline{0,n}$

Вектора $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0$ – л/н.

$\Pi = \operatorname{conv}\{a_0, \dots, a_n\}$ – симплекс

$\Pi = \{x \in E^n / x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i, \sum \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = \overline{0,n}\}$

$\Pi \in \operatorname{conv} \Omega(E^n)$, λ_i – барицентрические координаты точки, соотв. $\lambda_0 = \dots = \lambda_n$ нач-ся центром симплекса



Для ∀ точки её барицентр. коорд. опр. однозначно.

Д-во:

$$x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i a_i, \quad \sum \lambda_i = \sum \gamma_i = 1 \Rightarrow$$

$$\Leftarrow$$

$$0 = (\lambda_0 - \gamma_0) a_0 + \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \gamma_i) a_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \gamma_i)(a_i - a_0) \Rightarrow \{a_i - a_0\} \Rightarrow \lambda_i = \gamma_i, \ i = \overline{0,n}.$$

$$\Rightarrow \lambda_0 - \gamma_0 = -\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \gamma_i)$$

$$\Leftarrow$$

Пусть K – выпуклый конус с вершиной в т.O

l – луч с вершиной в т.O, $l \not\subset \operatorname{int} K$.

$\exists \psi \neq 0$: K и l отделимы

→

$K-\ell = \bigcup_{\substack{a\in K\\ b\in \ell}} [a-b]$ – вып. конус с вершиной 0

$K-\ell \neq E^n \Rightarrow 0 \in \partial(K-\ell) \Rightarrow \exists \psi \neq 0 : (0)_\psi$ $K-\ell$ отделимо

$(a-b, \psi) \geq 0$

Теорема 1 (необх. условие выпуклости на границу мн-ва достижимости)

$x(t), u(t)$; $x(t_1) \in \partial X(t_1) \Rightarrow 0 \in \partial K$,

– допустимая пара на $[t_0, t_1]$

$K = \bigcup_M \Phi(M)$, т.е. утверждение, что $K \neq E^n$

Д-во от противного. Пусть $0 \in \operatorname{int} K$. $\Pi = \operatorname{conv}\{a_0, a_1, \dots, a_n\} = \{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \geq 0\}$

Пусть 0 – центр этого симплекса, $\Pi \subset \operatorname{int} K \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall i = \overline{0,n}$ $\exists M_i : a_i = \varphi(M_i) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall a \in \Pi$ $a = \sum \lambda_i a_i = \sum \alpha_i \varphi(M_i) = \varphi(\sum \lambda_i M_i) = \varphi(M) \in K$

$M: x^*(t_1) - x(t_1) = \varepsilon a + \bar{o}(\varepsilon)$

Построим $f_\varepsilon(a) = \dfrac{x^*(t_1) - x(t_1)}{\varepsilon} = a + \dfrac{\bar{o}(\varepsilon)}{\varepsilon}$

f_ε – непр: $\Pi \to E^n$, $f_\varepsilon(a) - a \rightrightarrows 0 \Rightarrow$ по следствию 2

Рассмотрим $S_r(0) \subset \Pi$ (при маленьком r)

$\tilde{a} \in S_r(0) \Rightarrow \tilde{a} \in f_\varepsilon(\Pi) \Rightarrow \exists \varepsilon_0, \tilde{M}:$

$x^*(t_1) = x(t_1) + \varepsilon_0 a \in X(t_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t_1) + S_r(0) \in X(t_1) \Rightarrow x(t_1) \in \operatorname{int} X(t_1) \Rightarrow$ (?!)

Вернемся к задаче:

$$\dot{x}(t) = f(x,u)$$
$$x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1$$
$$\int_{t_0}^{t_1} f^0(x,u)\,dt \to \min_{u\in U}$$

Расширим ее:

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x \end{pmatrix} \quad \tilde{f} = \begin{pmatrix} f^0 \\ f \end{pmatrix}$$

$\dot{x}^0 = f^0(x,u)$, $x^0(t_0) = 0$

$\tilde{x}(t_1) \in \{\begin{pmatrix} \xi \\ x_1 \end{pmatrix}\}$, ξ – ?

Рассмотрим расш. конус в расш. пр-ве $\tilde{V}(M,\alpha)$: 1) 2)

$\tilde{V}(M,\alpha)$: $\tilde{x}^*(t_1^*) = \tilde{x}(t_1) + \varepsilon \varphi(\tilde{V}(M,\alpha)) + \bar{o}(\varepsilon)$

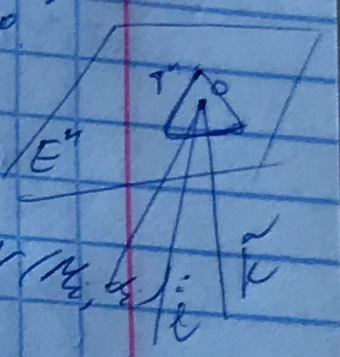
$\tilde{K} = \bigcup_{M,\alpha} \{\varphi(\tilde{V}(M,\alpha))\}$. // $t_1^* = t_1 + \varepsilon\alpha$

Введём l – отраж. направления оси x^0, $l = \begin{pmatrix} -\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$
конус парам переместим в начало координат

Теорема 2 Если $\bar{c} \subset \operatorname{int} \tilde{K}$, то выбранная пара $(\bar{x}(t), u(t))$, $t \in [t_0, t_1]$ не оптимальна.

Д-во: Возьмем $a_0, a_1, \dots, a_n \in E^n$. Введём $T^n = \operatorname{conv}\{a_0, \dots, a_n\}$ – симплекс, 0 – его центр. Отразим его на $-h$, $h > 0$. Будем это делать

Th: $T_h^n \subset \tilde{K}$ (будет полностью в $\tilde{K}$), где $\bar{T}_h^n = \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix} h \\ a_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -h \\ a_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -h \\ a_n \end{pmatrix}\right\} = \operatorname{conv}\{b_0, \dots, b_n\}$.



Таким образом можно сопоставить $\xi_i \to V(x_i, u_i)$:

$\tilde{x}^*(t_1^*) = \tilde{x}(t_1) + \varepsilon b + \bar{o}(\varepsilon)$

$b \in T_h^n$, $b = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i b_i$, $\alpha_i \geq 0$, $\sum \alpha_i = 1$.

$b \to V\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_i, \sum \lambda_i \alpha_i\right)$, $b = \begin{pmatrix} -h \\ \sum \alpha_i a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h \\ a \end{pmatrix}$

Пусть λ – оператор проектирования вдоль оси x^0: $\lambda(\xi_i) = a_i$, $a = \lambda(b)$.

$b \in \tilde{K}$ $V(M, \alpha)$ $\tilde{x}^*(t_1^*) = \tilde{x}(t_1) + \varepsilon \begin{pmatrix} -h \\ a \end{pmatrix} + \bar{o}(\varepsilon) = a + \frac{\bar{o}(\varepsilon)}{\varepsilon}$

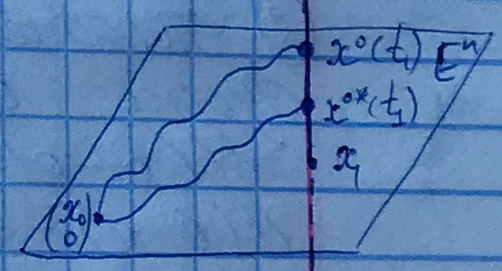
$a \in T^n$, $f_\varepsilon : T^n \to E^n$, $0 \in \operatorname{int} T^n \Rightarrow \forall \varepsilon \in \varepsilon_0 \; 0 \in \operatorname{int} f_\varepsilon(T^n)$

и $V(M_*, \alpha_*)$: $\dfrac{\lambda(\tilde{x}^*(t_1^*) - \tilde{x}(t_1))}{\varepsilon} = 0$.

А это значит, что $x^*(t_1^*) - x(t_1) = x_1$

$x^{0*}(t_1^*) = x^0(t_1) + \underbrace{\varepsilon \cdot (-h)}_{<0} + \bar{o}(\varepsilon) < x^0(t_1)$

$\Rightarrow x^0(t_1)$ – не оптим.



Теорема 3 (Необх усл выхода на границу M_1)

$H(x, \psi, u) = (\psi, f(x, u)) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \cdot f_i(x, u)$ – ψ-ция Гамильтона-Понтрягина

Пусть есть пара $(x(t), u(t))$ на $t \in [t_0, t_1]$, $x(t_1) \in \partial X(t_1)$.

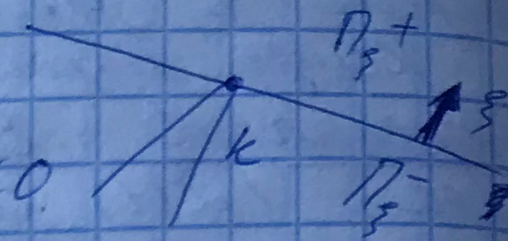
Тогда $\exists \psi(t) \not\equiv 0$: $\dot{\psi} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = \left(-\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^* \psi$:

1) $H(x, \psi, u) = \max_{v \in U} H(x, \psi, v) \quad \forall t \in [t_0, t_1]$
2) $M(x, \psi) = \max_{v \in U} H(x, \psi, v) \equiv \text{const}$

↳ функция Гамильтона

Д-во ① Т. 1: $x(t_1) \in \partial X(t_1) \Rightarrow 0 \in \partial K \Rightarrow 0$ и K отделимо

$\Rightarrow \exists \xi \neq 0: \ 0 \in \Pi_\xi^+, \ K \subset \Pi_\xi^-$



$\forall y \in K \quad (y, \xi) \leq 0$

Пусть $\begin{cases} \dot\psi = -(\partial f/\partial x)^* \psi \\ \psi(t_1) = \xi \end{cases} \Rightarrow \psi(t) \neq 0$

$\Rightarrow \forall y \in K \quad (y, \psi(t_1)) \leq 0$

Рассмотрим $M(\tau; \theta, v, \varepsilon)$:

$x^*(\tau) - x(\tau) = \varepsilon\theta[f(x(\tau), v) - f(x(\tau), u(\tau))] + \bar o(\varepsilon)$

$x^*(t_1) - x(t_1) = \varepsilon y(t_1) + \bar o(\varepsilon), \quad y(t_1) \in K,$

$y(t_1): \begin{cases} \dot y = -(\partial f/\partial x) y \\ y|_{\tau=\tau} = \theta[f(x(\tau), v) - f(x(\tau), u(\tau))] \end{cases}$

$(y(t_1), \psi(t_1)) \leq 0$ Докажем $(y(t), \psi(t)) = \text{const} \Rightarrow$

$\Rightarrow (y(\tau), \psi(\tau)) \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta(f(x(\tau), v) - f(x(\tau), u(\tau), \psi(\tau))) \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (f(x(\tau), v), \psi(\tau)) \leq f(x(\tau), u(\tau), \psi(\tau))$

$H(\theta, \psi, v) \leq H(x(\tau), \psi(\tau), \psi(\tau))$

Однако τ – точки непрерывности управления по предположению его непрерывность слева, поэтому в т. разрыва будем использовать предельный переход.

② Докажем, что $M(t)$ – непр на $[t_0, t_1]$

Пусть θ – точка разрыва управления

$M(\theta - 0) = M(\theta)$ по предположению того, что u – непр слева

$M(\theta - 0) = H(x(\theta), \psi(\theta), u(\theta - 0)) \geq [\text{ПМ ①}] \geq H(x(\theta), \psi(\theta), u(\theta + 0)) = M(\theta + 0)$

Возьмем $\tau_2, \tau_3: \ t_0 \leq \tau_2 < \tau_3 \leq t_1: \ (\tau_2, \tau_3]$ – участок непрерывности управления

Возьмем $\tau_0, \tau_1 \in (\tau_2, \tau_3)$. $M(t) = H(x(t), \psi(t), u(t))$

$H(x(\tau_0), \psi(\tau_0), u(\tau_0)) - H(x(\tau_0), \psi(\tau_0), u(\tau_1)) \geq 0$ (т.к. ПМ)

$-H(x(\tau_1), \psi(\tau_1), u(\tau_1)) + H(x(\tau_1), \psi(\tau_1), u(\tau_0)) \leq 0$ (т.к. max)

$\Rightarrow H(x(\tau_1), \psi(\tau_1), u(\tau_0)) - H(x(\tau_0), \psi(\tau_0), u(\tau_0)) \leq M(\tau_1) - M(\tau_0) \leq$

$\leq H(x(\tau_1), \psi(\tau_1), u(\tau_1)) - H(x(\tau_0), \psi(\tau_0), u(\tau_1))$

$M(\tau_0)$ $\qquad$ $M(\tau_1)$

Разделим все на $\tau_1 - \tau_0 \Rightarrow \dfrac{A}{\tau_1 - \tau_0} \leq \dfrac{M(\tau_1) - M(\tau_0)}{\tau_1 - \tau_0} \leq \dfrac{B}{\tau_1 - \tau_0}$

$\dfrac{d}{dt} H(x(t), \psi(t), u(\tau))\Big|_{t=\tau} = \dfrac{\partial H}{\partial x} \dot x\Big|_{t=\tau} + \dfrac{\partial H}{\partial \psi} \dot\psi\Big|_{t=\tau} =$

$$= \left[\psi^* \frac{\partial f}{\partial x} f + f^* \left(- \frac{\partial f}{\partial x} \right) \psi \right]_{t=\tau} = 0$$

Можно? Можно, это числа, а их можно транспонировать без проблем $a + (-a)^* = 0$

$\Rightarrow H'(\tau) = 0, \quad \tau \in (t_2, t_3) \Rightarrow$ на $(t_2, t_3]$, т.к. можно зажимать по непрерывности $\Rightarrow$

$\Rightarrow H(t) = const$

Ещё раз:

Задача:

$$(1) \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ x(t_0) = x_0, \; x(t_1) = x_1 \\ \int_{t_0}^{t_1} f^0(x, u)\, dt \to \min\limits_{u \in U} \end{cases}$$

(Не бояться на границу)

$\sim$

$$(2) \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}, u) \equiv \tilde{f}(x, u) \\ \tilde{x}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 \end{pmatrix}, \; x(t_1) = x_1 \\ x^0(t_1) \to \min\limits_{u \in U} \end{cases}$$

(Выпуклость)

$$H(\tilde{x}, \tilde{\psi}, u) = (\tilde{\psi}, \tilde{f}(x, u)) = \psi_0 f^0(x, u) + \psi_1 f^1(x, u) + \dots + \psi_n f^n(x, u) = \psi_0 f^0 + H(x, \psi, u)$$ – новая ф-ция Гамильтона-Понтрягина. $// H(\tilde{x}, \dots) = H(x, \dots)$

Теорема 4 (Принцип максимума Понтрягина) !

Пусть $(x(t), u(t)), t \in [t_0, t_1]$ – оптимальный процесс в (1). Тогда $\exists \tilde{\psi}(t) \not\equiv 0$:

$$\dot{\tilde{\psi}} = - \frac{\partial H}{\partial \tilde{x}} = - \left(\frac{\partial \tilde{f}(\tilde{x}, u)}{\partial \tilde{x}} \right)^* \tilde{\psi}$$:

1. $H(x, \tilde{\psi}, u) = \max\limits_{v \in U} H(x, \tilde{\psi}, v) \quad \forall t \in [t_0, t_1]$ (?)
2. $ell(x, \tilde{\psi}) \equiv const \Rightarrow \psi_0(t) = const$
3. $\psi_0(t_1) \le 0$ (либо 0, либо -1) $\Rightarrow ell(x(t_1), \tilde{\psi}(t_1)) = 0$

Д-во: $(\tilde{x}, u)$ – оптимальный процесс. Вспомним ℓ и $\tilde{K}$ $\ell \not\ni int \tilde{K}$, они отделимы, т.е. $\exists \tilde{\xi} \in E^{n+1}, \; \tilde{\xi} \neq 0 \quad \ell \subset \Pi^+_{\tilde{\xi}}, \; \tilde{K} \subset \Pi^-_{\tilde{\xi}}$

$\forall \tilde{y} \in \tilde{K} \quad (\tilde{y}, \tilde{\xi}) \le 0, \quad \forall \tilde{z} \in \ell \; \tilde{z} = \begin{pmatrix} -h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\tilde{z}, \tilde{\xi}) \ge 0$

$\tilde{\xi} = \tilde{\psi}(t_1)$, $\dot{\tilde{\psi}} = -\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}} \tilde{\psi}$, $\tilde{\psi}(t_1) = \tilde{\xi}$, $\tilde{\psi}(t) \not\equiv 0$.

$\tilde{y} \in \tilde{k}$ $\tilde{y} = \varphi(M) + \alpha \tilde{f}(x(t_1), u(t_1))$

$\alpha = 0$ $\Rightarrow$ п. т. 4 и 2 вспомнили (см. т. 3).

$\dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$, $i = \overline{0,n}$

$\dot{\psi}_0(t) = -\frac{\partial H(x, \psi, u)}{\partial x^0} = 0 \Rightarrow \psi_0(t) = const$

$\tilde{\xi}(t_1) = \begin{pmatrix} \psi_0(t_1) \\ \psi(t_1) \end{pmatrix}$. Вспомним $\tilde{z} = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \dot{0} \end{pmatrix} \in \ell$

$(\tilde{z}, \tilde{\xi}) \geq 0 \Rightarrow -\psi_0(t_1) \geq 0 \Rightarrow \psi_0(t_1) \leq 0$.

Напомним $\tilde{y} = \alpha \tilde{f}(x(t_1), u(t_1)) \in \tilde{k} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha(\tilde{\psi}(t_1), \tilde{f}(x(t_1), u(t_1))) = (\tilde{\psi}(t_1), \alpha \tilde{f}(x(t_1), u(t_1))) \leq 0$

α м.б. > 0 или < 0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\tilde{\psi}(t_1), \tilde{f}(x(t_1), u(t_1)) = 0$.

Какие задачи самые частые?

(1) Быстродействие

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \\ J = \int_{t_0}^{t_1} 1 \cdot dt = t_1 - t_0 \to \min \end{cases}$$

f^0

$H = \psi_0 \cdot 1 + \psi_1 f^1 + \dots + \psi_n f^n = \psi_0 + H(x, \psi, u)$

$\exists \tilde{\psi} \not\equiv 0$.

$\max_{v \in U} H(x, \tilde{\psi}, v) = \psi_0 + \max_{v \in U} H(x, \psi, u)$

$\psi_0(t) + H(x(t), \psi(t), u(t)) = \psi_0(t) + \max_{v \in U} H(x(t), \psi(t), v)$

$\exists t_* \in [t_0, t_1]$, $\psi(t_*) = 0$

$\psi_0(t) + H(x(t), \psi(t), u(t)) \equiv 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$

$\psi_0(t_*) + H(t_*) = \psi_0(t_*) = 0 \Rightarrow \tilde{\psi}(t_*) \equiv 0 \Rightarrow$ против с ПМП.

Теорема 3 $(x(t), u(t))$, $t \in [t_0, t_1]$ - опт. пара в ЗБ

$\exists \psi(t) \not\equiv 0$ $\dot{\psi} = -\partial H / \partial x$:

1. $H(x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{v \in U} H(x(t), \psi(t), v)$, $t \in [t_0, t_1]$

2. $M(x(t), \psi(t)) = \max_{v \in U} H(x(t), u(t), v) = -\psi_0 = const \geq 0$

г. 0.

г. 3).

= const

∈ ℓ

), u(t_1))) ≤ 0

(t), ū)

с ПМП

пара в Зб

, t_1]

ast ≥ 0

(2.) Со свободным концами (подвижными)

$\dot{x} = f(x,u)$

$x(t_0) \in M_0$ - радиус. σ_0

$x(t_1) \in M_1$ - радиус. σ_1

$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x,u)\,dt \to \min\limits_{u \in D_U}$

Вспомним скорейшее время

Пусть f - непр. дифф. функция рассмотрим уравнение $f(x_1, \dots, x_n) = 0$

$S = \{x \in E^n \mid f(x) = 0\}$ - гиперповерхность

$\operatorname{grad} f(x) = f'(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T$ - градиент

$x_* \in S$ - особая точка, если $f'(x_*) = 0$.

S - гладкая гиперповерхность, если $\forall x \in S \; f'(x) \neq 0$ (без особых точек)

$f(x) = a_0 x_1 + \dots + a_n x_n + b = 0$ задаёт гладкую ГП, если $\exists i: a_i \neq 0$.

Вектор $x_0 \in S: f'(x_0) \neq 0$ - вектор нормали

$x_0 \in \Pi$, $\vec{n} = f'(x_0)$, Π - касательная гиперплоскость к ПП S в т. x_0.

Рассмотрим: $S_1 \div f_1(x_1, \dots, x_n) = 0$

$\dots$

$S_k : f_k(x_1, \dots, x_n) = 0$

$M = \bigcap_{i=1}^{k} S_i$ - $(n-k)$-мерное гладкое многообразие, если $\forall x \in M \; f_1'(x), \dots, f_k'(x)$ линейно н/з.

T_i - касат. ГП в т. x_0 к ПП S_i

$T = \bigcap_{i=1}^{k} T_i$ - $(n-k)$- мерная касательная плоскость

Опр. $\tilde{\psi}(t)$ удовл. условию трансверсальности на ман-ве M_0 в т. x_0, если $\psi(t_0) \perp T_{x_0}$, где T_{x_0} - касат. ГП к M_0 в т. x_0, $\psi(t_1) \perp T_{x_1}$, где T_{x_1} - касат ГП к M_1 в т. x_1

Теорема 6 Пусть $(x(t), u(t))$ - опт. пара в ЗсПК. Тогда $\exists \tilde{\psi}(t) \neq 0$: $\dot{\tilde{\psi}} = \frac{\partial H}{\partial \tilde{x}}$:

→

1. Выполнены условия т. 4
2. Выполнены условия трансверсальности на M_0, M_1 с $\psi(t)$.

(3). $\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ x(t_0) = x_0, \; x(t_1) = x_1 \\ \int_{t_0}^{t_1} f^0(x, u, t)\,dt \to \min\limits_{u(\cdot) \in \mathcal{D}_U} \end{cases}$ ← неавтономность

$E^n \to E^{n+1} \equiv E^*$ (чтобы автономность была)

$\dot{x} = f$

$\dot{x}^{n+1} = 1 \quad x^{n+1}(t_0) = t_0 \Rightarrow x^{n+1}(t) = t$

$x^* = \begin{pmatrix} x \\ x^{n+1} \end{pmatrix} \quad f^* = \begin{pmatrix} f \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}^* = f(x^*, u) \\ x^*(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ t_0 \end{pmatrix} \\ x^*(t_1) \in S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \xi \end{pmatrix} \mid \xi \in E^1 \right\} \\ \int_{t_0}^{t_1} f^*(x^*, u)\,dt \to \min\limits_{u \in \mathcal{D}_U} \end{cases}$

$E^{n+1} \equiv E^* \to E^{n+2}$

$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^* \end{pmatrix}$ и применяем т. 4:

$\mathcal{H}^*(x, \tilde{\psi}^*, u, x^{n+1}) = (\tilde{\psi}^*, f^*) = \psi_0 f^0(x, u, x^{n+1}) + \psi_1 f^1(x, u, x^{n+1}) + \dots + \psi_n f^n(x, u, x^{n+1}) + \psi_{n+1} \cdot 1 = \mathcal{H}(x, \tilde{\psi}, u, t) + \psi_{n+1}$

$\mathcal{M}^*(x, \tilde{\psi}^*, x^{n+1}) = \max\limits_{v \in V} \mathcal{H}^*(x, \tilde{\psi}^*, v, x^{n+1}) = \max\limits_{v \in V} \mathcal{H}(x, \tilde{\psi}, v, t) + \psi_{n+1}(t) = \mathcal{M}(x, \tilde{\psi}, t) + \psi_{n+1}(t)$

$\exists\, \tilde{\psi}^*(t) \not\equiv 0 \in E^{n+2}$: $\dot{\psi}_i(t) = -\sum\limits_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \cdot \psi_\alpha, \quad i = 0, \dots, n$

$\dot{\psi}_{n+1}(t) = -\sum\limits_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial f^\alpha}{\partial t} \cdot \psi_\alpha$

1. $\mathcal{H}(x, \tilde{\psi}, u, t) + \psi_{n+1} = \mathcal{M}(x, \tilde{\psi}, t) + \psi_{n+1}, \quad t \in [t_0, t_1]$

$\tilde{\psi}(t) \not\equiv 0$, т.к. $\tilde{\psi}(t) \equiv 0 \Rightarrow \psi_{n+1} \equiv 0 \Rightarrow$?!, т.к. $\tilde{\psi}^* \not\equiv 0$

2. $\psi_0(t) \equiv const$

3. $\psi_0(t_1) \le 0$

4. (трансверс.) $\psi^*(t_1) \perp T_{x_1} = S_1 \Rightarrow$ *касательная к кривой и есть эта кривая*

$$\Rightarrow \psi_{n+1}(t_1) = 0$$

$$\begin{cases} \dot\psi_{n+1} = -\sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial f^\alpha}{\partial t}\psi_\alpha \\ \psi_{n+1}(t_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \psi_{n+1} = -\int_{t_0}^{t} \sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial f^*}{\partial t}\psi_\alpha \, dt$$

$$\Rightarrow \widetilde{ell}(x, \tilde\psi, t) = -\psi_{n+1}(t)$$

Теорема 7. *Пусть (x, u) – оптимальный процесс в неавтономной задаче ОУ. Тогда $\exists \tilde\psi$:*

1. *Выполнен принцип максимума* $H(x, \tilde\psi, u, t) = \widetilde{ell}(x, \tilde\psi, t)$
2. $\psi_0(t) = const$
$$\widetilde{ell}(x, \tilde\psi, t) = \int_{t_0}^{t} \sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial f^*}{\partial t}\psi_\alpha \, dt$$
3. $\psi_0(t_1) \le 0, \quad \widetilde{ell}(x(t_1), \tilde\psi(t_1), t_1) = 0$
4. *Остаются условия трансверсальности*

(4) t_0, t_1 – фиксированы

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot x^* = f^*(x^*, u) \\ x^*(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ t_0 \end{pmatrix} \\ x^*(t_1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \\ \int_{t_0}^{t_1} f^0(x^*, u)\,dt \to \min\limits_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \end{cases}$$

Сместим задачу на $[t_0, t_2]$.

Теорема 8. *Пусть (x, u) – опт. процесс в задаче с фикс. временем. Тогда $\exists \tilde\psi$:*

1. $H(x, \tilde\psi, u, t) = \widetilde{ell}(x, \tilde\psi, t)$
2. $\psi_0(t) = const, \quad \psi_0(t_1) \le 0$

Пример. Время дискретно, задача со свободным правым концом

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u,t) \\ x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) \in S_1 = E^n \end{cases}$$

— " —

$$\dot{x}_1 = E^n, \quad \psi(t_1) \perp E^n \Rightarrow \psi(t_1) = 0$$

Теорема 9

— " — если $\psi_0(t_1) = 0$, то $\hat{\psi}(t) \equiv 0 \Rightarrow$?! $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1. не максимум

2. $\hat{\psi}(t_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\psi} \\ 0 \end{pmatrix}$ // $\psi_0(t_1) < 0 \Rightarrow \psi_0(t_1) = -1$, т.к нормировка

Достаточное условие оптимальности

$$H(x,\tilde{\psi},u,t) = \psi_0 f^0 + (\psi, f) \quad (=)$$

$$\psi(t_1) = 0, \quad \psi_0(t_1) = -1, \quad \psi_0(t) = const$$

$$(=) \quad -f_0 + (\psi, f) = -f_0 + H(x,\psi,u,t)$$

$$H(x,\tilde{\psi},u,t) = \max_{v \in U} H(x,\tilde{\psi},v,t) = M(x,\tilde{\psi},t)$$

(1) Предположим, что $\exists\, v_*(x,\tilde{\psi},t) \in U$ максимизатор $\forall x,\tilde{\psi},t$

$$\begin{cases} \dot{x} = \left.\dfrac{\partial H}{\partial \psi}\right|_{u=v_*} = f(x, v_*(x,\psi,t)) = f_1(x,\psi,t) \\ \dot{\psi} = \left.-\dfrac{\partial H}{\partial x}\right|_{u=v_*} = -\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^*\Big|_{u=v_*} \cdot \psi = f_2(x,\psi,t) \\ x(t_0) = x_0 \\ \psi(t_1) = 0 \end{cases}$$

краевая задача ПМП

экстремаль, траектория (u_*, x, ψ)

(2) Предположим, что $\exists\, x(t), \psi(t)$ — решение КЗПМП $\Rightarrow$

$\Rightarrow u(t) = v_*(x,\psi,t) \Rightarrow (x,u)$ удов. ПМП на $[t_0,t_1]$,

(3) Предположим, что $\exists$ градиент $M_x(x,\psi,t)$ — непр.

(4) Предположим, что $\dot{\psi} = -M_x(x,\psi,t)$

Предположим, что $M(x,\psi(t),t)$ выпукла по x $\forall t\in[t_0,t_1]$ $\quad x\in E^n$

$f: E^n \to E^1$ выпукла, если $\forall x_1, x_2 \in E^n$, $\forall \lambda\in[0,1]$

$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

Функция всегда имеет направление $\Rightarrow$

$\forall x, x+\Delta x \in E^n$

$\Rightarrow f(x+\Delta x) - f(x) - (f'(x), \Delta x) \leq 0$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow M(x+\Delta x, \psi, t) - M(x,\psi,t) - (M'_x(x,\psi,t), \Delta x) \leq 0$, $\forall x, \Delta x \in E^n$

Д-во (почему нам оптимально?)

Пусть $(\vec{x}, \vec{u})$ – t процесс, допустимый в исходной задаче $\Rightarrow \vec{x}(t_0) = x_0$

(x, u) – экстремальный процесс

$$\vec{L} = \int_{t_0}^{t_1} f^0(\vec{x}, \vec{u}, t)\,dt, \quad L = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x, u, t)\,dt$$

$$\Delta L = L(\vec{u}(\cdot)) - L(u(\cdot)), \quad \Delta x = \vec{x} - x.$$

Наша цель: показать, что $\Delta L \geq 0$.

Представим нам: $0 = (\psi(t), \Delta x(t))\Big|_{t=t_0}^{t=t_1} =$, т.к. $\psi(t_1)=0$, $\Delta x(t_0)=0$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}(\psi(t), \Delta x(t))\,dt = \int_{t_0}^{t_1} [(\dot\psi, \Delta x) + (\psi, \dot{\vec{x}} - \dot x)]\,dt =$$

$$= \{\dot\psi = -M'_x\} = \int_{t_0}^{t_1} [-(M'_x(x,\psi,t), \Delta x) + (\psi, \vec{f}(\vec{x},\vec{u},t)) -$$

$$- (\psi, f(x,u,t))]\,dt \quad (=)$$

$H = -f^0 + (\psi, f) \Rightarrow (\psi, \vec{f}) = \vec{f}^0 + \vec{H}(\vec{x}, \psi, \vec{u}, t)$, $\Big\}\Rightarrow$

$(\psi, f) = f^0 + H(x, \psi, u, t) = $ ПММП $= f^0 + M(x,\psi,t)$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} (\psi, \vec{f})\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \vec{f}^0(\vec{x},\vec{u},t)\,dt + \int_{t_0}^{t_1} \vec{H}(\vec{x},\psi,\vec{u},t)\,dt = \vec{L}(\vec{u}) + \int_{t_0}^{t_1} H\,dt$$

$$\int_{t_0}^{t_1} (\psi, f)\,dt = L(u) + \int_{t_0}^{t_1} M(x,\psi,t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow \int_{t_0}^{t_1}\left[-(H_x'(x,\psi,t),\psi)+\mathcal{H}(x,\psi,u,t)-H(x,\psi,t)+\Delta L\right]dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\Delta L=\int_{t_0}^{t_1}\left[\mathcal{H}(x,\psi,u,t)-H(x,\psi,t)-(H_x'(x,\psi,t),\psi)\right]dt$$

$$\mathcal{H}(x,\psi,u,t)\le H(x,\psi,t)\quad\forall x,\psi,t. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\Delta L\le\int_{t_0}^{t_1}\left[H(x,\psi,t)-H(x,\psi,t)-(H_x',\psi)\right]dt=$$

$$=\{\hat{x}=x+\delta x\}=\int_{t_0}^{t_1}\left[H(x+\delta x,\psi,t)-H(x,\psi,t)-(H_x',\psi)\right]dt\le 0$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta L\ge 0} \Rightarrow (x,u)-$$ оптимальный процесс

Замечание: правый конец закреплять: $x(t_1)=x_1$. В таком случае процесс с нулевой тоже пройдет

Линейно-квадратичная ЗОУ

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ x(0)=x_0\\ L=\frac{1}{2}\int_0^T(x^*Qx+\|u\|^2)dt\to\min\limits_{u(\cdot)\in E^m}\end{cases}$$

u^*Ru

$A,B-(n\times n)$, $Q-(n\times n)$, $Q=Q^*\ge 0$, $R>0$, $R=E$

правый конец свободен. $\psi_0=-1$.

$$\mathcal{H}(x,\psi,u)=-\frac{1}{2}(x^*Qx+\|u\|)+(\psi,Ax+Bu)$$

ПМП: $\mathcal{H}(x,\psi,u)\to\max$, $\mathcal{H}_u'=-u+B^*\psi=0$

$\mathcal{H}_{uu}''=-E<0\Rightarrow u_*(\psi)=B^*\psi$ — max.

$$H(x,\psi)=\mathcal{H}(x,\psi,u_*(\psi))=-\frac{1}{2}(x^*Qx+\|B^*\psi\|^2)+$$
$$+(\psi,Ax)+(\psi,BB^*\psi)\quad(=)$$
$$(\psi,BB^*\psi)=(B^*\psi,B^*\psi)=\|B^*\psi\|^2=$$

$$\textcircled{2} = -\frac{1}{2}x^*Qx + (\psi, Ax) + \frac{1}{2}\|B^*\psi\|^2$$

$H_{xx}'' = -Q \le 0 \Rightarrow H(x,\psi)$ – вогнута по $x \in E^n$ $\forall \psi \in E^n \Rightarrow$

$H_x' = -Qx + (A^*\psi)$

$\Rightarrow$ решения КЗПМ – опорные решения.

Расшир. сис. задачу:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BB^*\psi \\ \dot{\psi} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = Qx - A^*\psi = -H_x' \\ x(0) = x_0, \quad \psi(T) = 0 \end{cases}$$

// КЗПМ для лин-квадр ЗОУ

Замечание. Решение КЗПМ для лин-квадр ЗОУ единственно.

Д-во Докажем, что однородная задача ур-ия $x(0)=0$, имеет только $x(t) \equiv \psi(t) \equiv 0$

Рассмотрим $z(t) = \psi(t) + P(t)x(t)$, где P – решение сопр. матр ур-ния:

$$\begin{cases} \dot{P} = -Q - PA - A^*P + PBB^*P \\ P(T) = 0 \end{cases} \quad (P = P^*)$$

– матричное ур-ние Риккати

Докажем, что на решении $z \equiv 0$

$$z(T) = \psi(T) + P(T)x(T) = \psi(T)$$

$$\dot{z} = \dot{\psi} + \dot{P}x + P\dot{x} = -A^*\psi + Qx + (-Q + PA - A^*P + PBB^*P)x + P(Ax + BB^*\psi) = \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{z} = (-A^* + P(t)BB^*)z \\ z(T) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{линейн. ур-ние} \Rightarrow z(t) \equiv 0.$$

$$\Rightarrow \psi(t) = -P(t)x(t) \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = (A - BB^*P)x \\ x(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow x \equiv 0.$$

Метод пристрелки

Как решать по ур-ию?

① Решаем: $\begin{cases} \dot{P} = -Q - PA - A^*P + PBB^*P \\ P(T) = 0 \end{cases}$

Решаем на $[0, T]$, причём назад ←

② Решаем $\begin{cases} \dot{x} = (A - BB^*P)x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ вперёд $[0, T]$ →

③ $\psi(t) = -P(t)x(t)$
$u(t) = B^*P(t)x(t)$

Теория американских учёных

Ричард Беллман

Метод динамического программирования

① Метод погружения

$f(x; \alpha) \to \min\limits_{x \in X(\alpha)}$

Имеется семейство задач, $\alpha \in A$ – параметр.
$f(x, \alpha_0) = f(x)$
$X(\alpha_0) = X$ ⇒ исходная задача – частный случай

② Принцип оптимальности

∀ кусок оптимальной траектории оптимален

③ Уравнение Беллмана

Пусть задачи имеют решения
Введём ф-цию $T(\alpha) = \min\limits_{x \in X(\alpha)} f(x; \alpha)$
$V(\alpha) = -T(\alpha)$ – ф-ция Беллмана

предположим, что $V(\alpha)$ непрерывно дифференцируема, построим:

④ Уравнение Беллмана

Пусть хотим решить ЗБ:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \\ t_1 - t_0 \to \min \end{cases}$$

Отпустим x_0. Пусть $\alpha = x_0$. Обобщение:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ x(t_0) = \alpha, \quad x(t_1) = x_1 \\ t_1 - t_0 \to \min \end{cases}$$

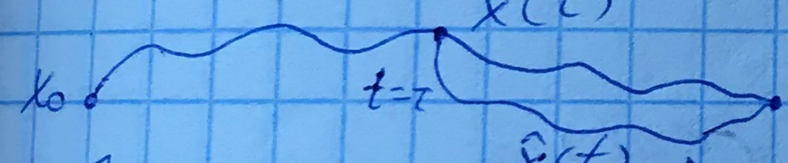
Предположение 1

$\forall \alpha \in E^n$ $\exists$ решение ЗБ, $T(\alpha)$ – время быстродействия

$V(\alpha) = -T(\alpha)$ $\quad T(\alpha) > 0, \ \alpha = x_1, \quad T(x_1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow V(\alpha) < 0, \ \alpha \neq x_1, \quad V(x_1) = 0$

Проверим принцип оптимальности: $\forall$ "хвост" оптим. траектории оптимален



$\exists \hat{u}(t), \hat{x}(t): \quad \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, \hat{u})$

$\hat{x}|_{t=\tau} = x(\tau), \quad \hat{x}|_{t=\hat{t}_1} = x_1, \quad \hat{t}_1 < t_1$, т.е.

первый переход неоптимален по предположению

$$u_*(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [t_0, \tau] \\ \hat{u}(t), & t \in (\tau, \hat{t}_1] \end{cases}$$

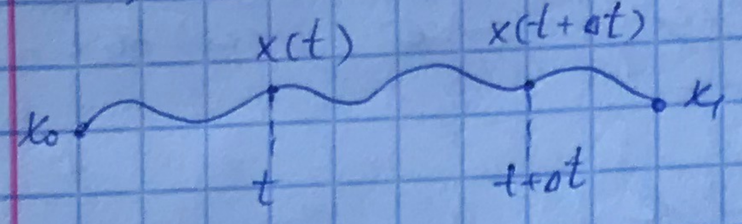
$$x_*(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [t_0, \tau] \\ \hat{x}(t), & t \in (\tau, \hat{t}_1] \end{cases}$$

Предположение 2

$V(x)$ – непр. в E^n, $\exists V'(x) \ \forall x \in E^n \setminus \{x_1\}$ – непр в E^n

$u(t), x(t), t \in [t_0, t_1]$ – оптим. процесс, x_0 в x_1

$t, \Delta t: \quad t, t+\Delta t \in [t_0, t_1)$



В силу принципа оптимальности

$\Rightarrow T(x(t)) = \Delta t + T(x(t+\Delta t))$

$\Rightarrow \dfrac{T(x(t)) - T(x(t+\Delta t))}{\Delta t} = 1 \Rightarrow \dfrac{V(x(t+\Delta t)) - V(x(t))}{\Delta t} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\Delta t \to 0\} \to \dfrac{dV(x(t))}{dt} = 1$

Пусть теперь t - точки непрерывности $\dot{V}(x(t))$

$(V'(x(t)), \dot{x}(t)) = 1$

$(V'(x(t)), f(x(t), u(t))) = 1$

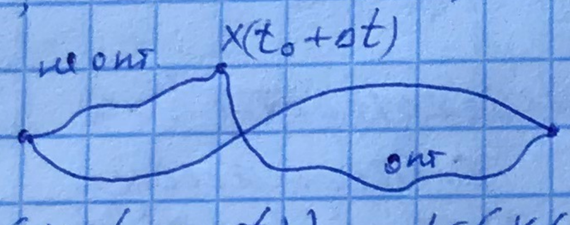
$u(\theta) = u(\theta - 0)$ делаем предельный переход, как для принципа максимума.

$\Rightarrow$ <u>Необх условие оптимальности:</u>

$(V'(x(t)), f(x(t), u(t))) = 1, \quad t_0 < t \le t_1$

$t = t_0 \Rightarrow (V'(x_0), f(x_0, u(t_0))) = 1, \quad \forall x_0 \ne x_1$

$t_0, t_0 + \Delta t \in [t_0, t_1)$



$u(t) \equiv v \in U$ (const)

$T(x_0) \le \Delta t + T(x(t_0 + \Delta t))$

$\dfrac{V(x(t_0+\Delta t)) - V(x(t_0))}{\Delta t} \le 1$

$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + \dot{x}(t_0)\Delta t + \bar{o}(\Delta t) =$

$= x(t_0) + f(x(t_0), u(t_0)) \cdot \Delta t + \bar{o}(\Delta t) =$

$= x(t_0) + f(x_0, v)\Delta t + \bar{o}(\Delta t)$

$\Rightarrow (V'(x_0), f(x_0, v)) \le 1 \quad \forall x_0 \ne x_1, \ \forall v \in U$

$\begin{cases} \max\limits_{u \in U} (V'(x), f(x,u)) = 1 & - \text{ ур-ние Беллмана} \\ V(x_1) = 0 & - \text{ краевое условие} \end{cases}$

Ур-ние Беллмана - ур-ние в частных производных, решение в общем случае нетривиальное, ищут max.

Теорема Пусть $V(x)$ – гладкое решение: $V(x)$ – непр. в $\bar{G} \in \mathbb{R}^n$ ур-ние Беллмана. Если $u(t)$ и $x(t)$ такие, что $(V'(x(t)), f(x(t), u(t))) = 1$, $t \in [t_0, t_1)$, то $(x(t), u(t))$ – оптимальная пара.

Д-во: $\vec{u}(t)$, $\vec{x}(t)$ $t \in [t_0, t_1]$ – на t_0 и t_1

$T(t_0) = 0 - V(t_0) = V(t_1) - V(t_0) = V(\vec{x}(t))\Big|_{t=t_0}^{t=t_1} =$

$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} V(\vec{x}(t))\,dt = \int_{t_0}^{t_1} (V'(\vec{x}(t)), f(\vec{x}(t), \vec{u}(t)))dt \leq$ ↙ д. ч. не решение

$\leq \int_{t_0}^{t_1} 1\,dt = t_1 - t_0 \Rightarrow x(t), u(t)$ – оптимальная пара

Пример ① $\begin{cases} \dot{x} = u \\ x(0) = x_0 \\ x(T) = 0 \\ T \to \min\limits_{u \in S_1(0)} \end{cases}$

Уравнение Беллмана: $\max\limits_{u \in U} (V'(x), f(x,u)) = I$

$\max\limits_{u \in S_1(0)} (V'(x), u) = I$

$\|V'(x)\| = I \Rightarrow V(x) = \pm\|x\| + C$

$V(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$V(x) < 0 \Rightarrow V(x) = -\|x\|$

$V'(x) = -\frac{x}{\|x\|} \Rightarrow u(x) = -\frac{x}{\|x\|} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -\frac{x}{\|x\|} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ - система в дорожке обратной связи

$\begin{cases} x(t) = \frac{x_0}{\|x_0\|}(\|x_0\| + t) \\ u(t) = -\frac{x_0}{\|x_0\|} \\ T = \|x_0\| \end{cases}$ - решение

$u(x(t)) = -\frac{x(t)}{\|x(t)\|}, \quad t \in [0, T)$

② $\begin{cases} \dot{x} = Ax + u, \\ x(0) = x_0 \\ x(T) = 0 \\ T \to \min\limits_{u \in S_R(0)} \end{cases}$ A - кососимметрична, т.е. $A^* = -A$

$(x, \vec{Ax}) = (A^*x, x) = -(x, Ax) = 0$

$\max\limits_{u \in U} (V'(x), f(x,u)) = I$

$(V'(x), Ax) + \max\limits_{u \in S_R(0)} (V'(x), f(x,u)) = I$

$(V'(x), Ax) + R\|V'(x)\| = I$

$\Rightarrow V(x) = -\frac{\|x\|}{R}; \quad V'(x) = -\frac{I}{R} \cdot \frac{x}{\|x\|}$

$\Rightarrow \dot{x} = Ax - \frac{r}{R}\frac{x}{\|x\|}$

③ $\begin{cases} \dot{x} = f(x) + u \\ x(0) = x_0 \\ x(T) = 0 \\ T \to \min\limits_{u \in U(0)} \end{cases}$

↓

данная динамическая

Потребуем, чтоб $(x, f(x)) = 0$

// Если $\dot{x} = f(x)$ то система решений называется инвариантной относительно системой корней, т.к

$\frac{d\|x\|}{dt} = 2(x, \dot{x}) = 2(x, f(x)) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|x(t)\| = const$

Предположение 3

Пусть теперь $V''(x)$ - непр в $E^n \setminus \{x\}$

$\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = \overline{1,n}$

$B(x, u) = (V'(x), f(x, u))$

$\max\limits_{u \in U} B(x, u) = 1$

$B'_x = V''(x) f(x, u) + f'^*_x(x, u) \cdot V'(x)$

Пусть $u(t), x(t), t \in [t_0, t_1]$ - оптимальный процесс в ЗБ

$\Rightarrow B(x(t), u(t)) = 1, \quad t \in [t_0, t_1)$

$B(x, u(t)) \le 1, \forall x \neq x_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow B'_x|_{x=x(t)} = 0$

$V''(x(t)) f(x(t), u(t)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^* V'(x, t)$

Обозн. $\psi(t) = V'(x(t))$

$\dot{\psi} = V''(x(t))\dot{x} = V''(x(t)) f(x(t), u(t)) = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^* \psi(t), \quad t \in [t_0, t_1)$

$(V'(x(t)), f(x, u)) = \max\limits_{v \in U} (V'(x(t)), f(x(t), v)), \quad t \in [t_0, t_1)$

$(\psi(t), f(x(t), u(t))) = \max\limits_{v \in U} (\psi(t), f(x(t), v)) \quad t \in [t_0, t_1)$

$H(x(t), \psi(t), u(t)) = \max\limits_{v \in U} H(x(t), \psi(t), v), \quad t \in [t_0, t_1)$

Пример

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \\ \mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x,u)\,dt \to \min \\ t_0, t_1 - \text{фиксированы} \end{cases}$$

Надо обобщить, отпустили время $\Rightarrow$

$x(t_0) = x_0 \longrightarrow x(\tau) = y$

$\mathcal{L} = \int_{\tau}^{t_1} f^0\,dt$, $\alpha = (y,\tau) \in E^{n+1}$

Надо ф-ция Беллмана: $V(y,\tau) = -\mathcal{L}(y,\tau)$

На оптим. траектории выполнено:

$(V'(x(t),t), f(x(t),u(t))) + V_t'(x(t),t) - f^0(x(t),u(t)) = 0$

$\forall\, t_0 < t < t_1, \quad x \in E^n \setminus \{x_1\}$

Ур-ние Беллмана:

$$\begin{cases} V_t'(x,t) + \max\limits_{v \in U} [(V_x'(x,t), f(x,v)) - f^0(x,v)] = 0 \\ V(x_1,t_1) = 0 \end{cases}$$

Задача о напряженной гайтинге

$$\begin{cases} \dot{x} = F(u) - G(x), \quad u,x \in E^1 \\ x(0) = x_0 \\ x(T) = x_1 > x_0 \\ \int_0^T u(t)\,dt \to \min\limits_{u \in U} \end{cases}$$

x - температура

$U_I = [0,+\infty)$ T - свободное

$U_{II} = [0,u_+]$ $\exists \varepsilon > 0 : (0,\varepsilon) : u(t) > 0$

$F(u) = \frac{1}{a} \cdot \frac{u}{1+u/k}$, $G(x) = b(x - x_0)$, $a,k,b > 0$

Удобно ввести: $z = \frac{a(x-x_0)}{k}$, $v = \frac{u}{k}$,

$$\begin{cases} \dot{z} = \frac{v}{1+v} - bz \\ z(0) = 0 \\ z(T) = z_1 > 0 \\ \mathcal{L} = \int_0^T v(t)\,dt \to \min\limits_{v \in U_V} \end{cases}$$

$V_I = [0,+\infty)$

$V_{II} = [0,v_+]$

Сделали это, чтобы уменьшить число параметров

$f(x) = \frac{x}{1+x}$, $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$ ↑

Лемма. (об управляемости)
Система (наша) управляема, если
$\tau_1 < \frac{1}{b}$ (τ в случае V_I) или $\tau_1 < \frac{1}{b}\frac{v_+}{1+v_+}$ (τ в случае V_{II})

Д-во: $\dot{x} = f(x,t)$, $x(t_0) = x_0$
$\dot{y} = g(y,t)$, $y(t_0) = y_0$

Теорема Чеплыгина: $\begin{cases} x_0 \le y_0 \\ f(z,t) \le g(z,t) \end{cases} \Rightarrow x(t) \le y(t)$, $t \in [0,T]$

Применение: 1) $0 \le \dot{z} \le 1 - bz$
$0 \le z(t) \le \frac{1}{b}(1 - e^{-bt}) = z^+(t)$
2) $0 \le \dot{z} \le \frac{v_+}{1+v_+} - bz$
$0 \le z(t) \le \frac{1}{b}\frac{v_+}{1+v_+}(1 - e^{-bt})$

Надо посмотреть ПМ

$H(z, \psi, v) = \psi_0 v + \psi(\frac{v}{1+v} - bz) = 0$ (смотрим вектор $\tilde{\psi}$)

1) $\psi_0 = 0 \Rightarrow$ а) $\psi \equiv 0 \Rightarrow \tilde{\psi} \equiv 0 \Rightarrow$ нельзя
б) $\frac{v}{1+v} - bz = 0 \Rightarrow z \equiv 0 \Rightarrow$ нет смысла
2) $\Rightarrow \psi_0 = -1 \Rightarrow$
$\Rightarrow H(z, \psi, v) = -v + \psi \cdot (\frac{v}{1+v} - bz)$
$H \to \max_{v \in V_I}$
$H'_v = -1 + \frac{\psi}{(1+v)^2} = 0 \Rightarrow (1+v)^2 = \psi$
$H''_{vv} = \frac{-2\psi}{(1+v)^3} < 0 \Rightarrow$ действ. max
$v_*(\psi) = \sqrt{\psi} - 1 \in [0, v_+]$
иначе придётся делать срезку

К чему всё это в итоге пришли? Вот:

$v_*(\psi) = \begin{cases} 0, & \psi \le 1 \\ \sqrt{\psi} - 1, & \psi > 1, \sqrt{\psi} - 1 \in [0, v_+] \\ v_+, & \psi > 1, \sqrt{\psi} - 1 > v_+ \end{cases}$ ← в случае V_I добавляется

$H(t) \equiv 0$, $t \in [0,T]$,
$H(t)|_{t=0} = 0 = -v(0) + \psi(0)(\frac{v(0)}{1+v(0)} - bz(0))$ =
1) $v(0) = 0 \Rightarrow \psi(0) \neq 0$ (т.к. иначе $v \equiv 0$, а это ?!)
$= 1$

$\Leftarrow v(0)\left(-1+\frac{4(0)}{1+v(0)}\right) \Rightarrow \frac{4(0)}{1+v(0)} = 1$

$4(0) = 1+v(0) = 1+\sqrt{4(0)}-1$

$\sqrt{4(0)}(\sqrt{4(0)}-1)$, аналогично $\sqrt{4(0)} \neq 0$, $= 1$

$\Rightarrow \underline{4(0)=1}$,

$\dot{z} = -v + 4\left(\frac{v}{1+v} - bz\right)$

$\begin{cases} \dot{4} = -\frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = b4 \\ 4(0) = 1 \end{cases}$

$4(t) = e^{bt} \geq 1$

$\Rightarrow v_*(t) = \sqrt{4(t)} - 1 = e^{\frac{bt}{2}} - 1$ — оптимальное управление

$\begin{cases} \dot{z} = \frac{e^{\frac{b}{2}t}-1}{1+e^{\frac{b}{2}t}-1} - bz = 1 - e^{-\frac{b}{2}t} - bz \\ z(0)=0 \end{cases}$

$\Rightarrow z_*(t) = \left(1-e^{-\frac{b}{2}t}\right)2\cdot\frac{1}{b}$ — оптимальная траектория

$z_*(T_*) = z_1$

$1 - e^{-\frac{b}{2}T_*} = \sqrt{bz_1}$

В итоге к решению осталось добавить:

$T_* = \frac{2}{b}\ln\frac{1}{1-\sqrt{bz_1}}$

$L_* = \frac{2}{b}\left(\frac{1}{1-\sqrt{bz_1}} - 1\right) - \frac{2}{b}\ln\frac{1}{1-\sqrt{bz_1}}$

Проблема: $\frac{v}{1+v} = 1 - e^{-\frac{b}{2}t} = \sqrt{bz}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \dot{z} = \sqrt{bz} - bz \\ z(0)=0 \end{cases}$ — очевидное решение $z \equiv 0$ — чего делать?

Замена: $y = \sqrt{bz}$, $y^2 = bz$, $z = y^2/b$.

$\Rightarrow \frac{2y\dot{y}}{b} = y - y^2$ (на y можно сокращать) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \dot{y} = \frac{b}{2}(1-y) \\ y(0)=0 \end{cases}$

(по двум случаям V_1)

Рассмотрим теперь случай V_{II}

Изменения начнутся когда $\exists \theta \in [0, T_*]$:
$v_*(\theta) = v_+$. Тогда строим новое управление.

$$v_{**}(t) = \begin{cases} v_*(t), & [0, \theta] \\ v_+, & (\theta, T_{**}] \end{cases}$$

(т.е. сделали срезку.)

У нас остались непрерывность и гладкость по построению

$$\begin{cases} \dot{z} = \dfrac{v_+}{1+v_+} - bz \\ z(\theta) = \dfrac{1}{b}(1 - e^{-\frac{b}{2}\theta})^2 \end{cases} \Rightarrow \bar{z}_*(t), \; t > \theta$$

$$z_{**}(t) = \begin{cases} z_*(t), & t \in [0, \theta] \\ \bar{z}_*(t), & t \in (\theta, T_{**}] \end{cases}$$

$$z_{**}(T_{**}) = z_1$$

Почему описанное всё? Линейное $\Rightarrow$ выпуклость $\Rightarrow$ ПМ – не только необход. но и дост условие $\Rightarrow$ всё класс.

Модель распределения ресурсов в колонии микроорганизмов

Задача о трюме.

Ресурс бывает на 1) рост (размножение)
2) восстан. механизмов

Пусть x – состояние механизма усвоения питательных веществ.

Пусть она сама за ним следит:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha - (a + x)u \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

(справой конец свободный)

$$L = \int_0^T -\frac{x}{1+x}\,u\,dt \to \min_{u \in [0,1]}$$

(размерог на max) (1)

T – фиксировано

u – доля того, что идет в рост

Рассмотрим экстремальные случаи

1) $u \equiv 0 \Rightarrow L = 0$ (роста нет совсем)

2) $u \equiv 1$

$\dot{x} = -x \Rightarrow x = x_0 e^{-t} \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ наличия ф-ции тоже достаточно для того, чтобы не коллапсировать.

Хорошо бы поставить фазовое ограничение $x(t) \geq 0$.

В теории задачи с такими решениями сложны.

Лемма. Пусть (u, x), $t \in [0, T]$ – допустимый процесс. Тогда

$0 < x_-(t) \leq x(t) \leq x_+(t)$, где

$x_-(t)$ – решение при $u \equiv 1$

$x_+(t)$ – решение при $u \equiv 0$

Д-во: $x(0) = x_0 > 0 \Rightarrow \exists\, \tau > 0 : x(t) > 0$ на $[0, \tau)$

по г. Чеплыгина

$\dot{x}_- = -x \leq \dot{x} = a - (a + x)u \leq a = \dot{x}_+ \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{x}_-(t) \leq x(t) \leq x_+(t)$

$H(x, \psi, u) = \frac{x}{1+x} u + \psi(a - (a+x)u) =$

$= \left(\frac{x}{1+x} - (a+x)\psi\right) u + \psi a =$

$= \Pi(x, \psi) u + \psi a \to \max$

$u_*(x, \psi) = \begin{cases} 1, & \Pi > 0 \\ 0, & \Pi < 0 \\ u_s, & \Pi = 0 \end{cases}$ (особое управление)?

$\psi_0 = -1$, т.к. $\psi(T) = 0$.

$\Pi|_{t=T} = \frac{x(T)}{1+x(T)} - (a + x(T))\psi(T) = \frac{x(T)}{1+x(T)} > 0$

Теорема 1 Оптим. упр-ние на $[0,T]$

$u_*(t) = \pm 1$ (в конце нужно уточнить)

$H(x(T), \psi(T)) \equiv \Pi(T) > 0 \Rightarrow \exists \theta : \Pi(t) > 0 \quad t \in [\theta, T]$

$u(t) \equiv +1.$

Строим КЗПМ:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial \psi}\Big|_{u=u_*} = a - (a+x)u_* \equiv f_1(x,\psi) \\ \dot{\psi} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -\left(\dfrac{1}{(1+x)^2} - \psi\right)u_* \equiv f_2(x,\psi) \\ x(0) = x_0, \quad \psi(T) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Предположим, что $\exists$ промежуток времени (τ, θ) : $\forall t \in (\tau, \theta) \quad \Pi(x(t), \psi(t)) \equiv 0.$

$$\Rightarrow \frac{d\Pi}{dt} \equiv 0, \quad \frac{d^2\Pi}{dt^2} \equiv 0.$$

$$\Pi = \frac{x}{1+x} - \psi(a+x) \equiv 0$$

$$\dot{\Pi} = \frac{1}{(1+x)^2}\dot{x} - \dot{\psi}(a+x) - \psi\dot{x} = \left(\frac{1}{(1+x)^2} - \psi\right)\dot{x} + \left(\frac{1}{(1+x)^2} - \psi\right)u(a+x) = \left(\frac{1}{(1+x)^2} - \psi\right)\dot{x} + u(a+x) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \psi = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\ddot{\Pi} \equiv 0; \quad \dot{\psi} = \frac{-2\dot{x}}{(1+x)^3}; \quad \dot{\psi} = -\left(\overset{0}{\overset{\cdot\cdot}{\frac{1}{(1+x)^2}}} - \psi\right)u \equiv 0, \quad x > 0$$

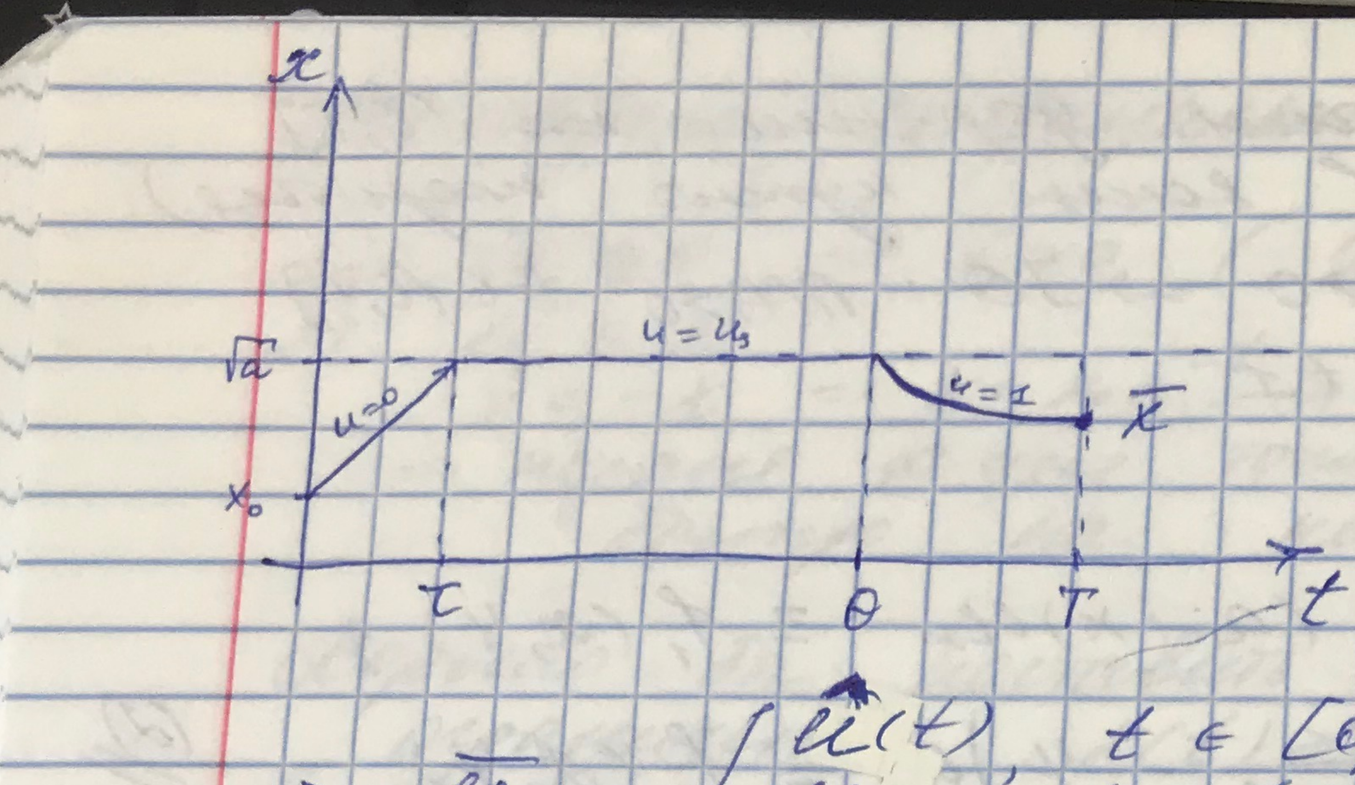
$\Rightarrow \dot{x} \equiv 0 \Rightarrow x = const$ на особом режиме.

$$\dot{x} = a - (a+x)u = 0 \Rightarrow u = u_s = \frac{a}{a+x} \in (0,1)$$

$$\psi = \frac{x}{(1+x)(a+x)} = \frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow x + x^2 = a + x \Rightarrow x = \sqrt{a}$$

Итак, получили:

$$\begin{cases} u_s = a/a+x \\ x_s = \sqrt{a} \\ \psi_s = \dfrac{1}{(1+\sqrt{a})^2} \end{cases}$$



$$\dot{x}(t) = x_1(t) = x_0 + at$$
$$x(\tau) = \sqrt{a} = x_0 + a\tau$$
$$\Rightarrow \tau = \frac{\sqrt{a} - x_0}{a}$$
$$\dot{x} = -x$$
$$x(\theta) = \sqrt{a}$$
$$x(t) = \sqrt{a}\, e^{\theta - t}$$

$$\Rightarrow u = \begin{cases} u_3, & t \in [0, \tau] \\ 1, & t \in (\tau, \theta] \\ 0, & t \in (\theta, T] \end{cases}$$

$$I_3 = -\int_0^{\tau} \frac{\dot{x}(t)}{1+x(t)}\, dt + \int_{\tau}^{\theta} -\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}\, dt +$$
$$+ \int_{\theta}^{T} -\frac{\sqrt{a}\, e^{\theta - t}}{1+\sqrt{a}\, e^{\theta - t}}\, dt = const(\theta) -$$
$$-\left(\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}\right)^2 (\theta - \tau) + \ln \frac{1+\sqrt{a}\, e^{\theta - T}}{1+\sqrt{a}} = \varphi(\theta)$$

$$\varphi(\theta) \to \min, \quad \theta > \tau.$$

$$\varphi'(\theta) = -\left(\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}\right)^2 + \frac{1+\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}\, e^{\theta - T}} \cdot \frac{\sqrt{a}\, e^{\theta - T}}{1+\sqrt{a}} = 0$$
$$\Rightarrow T - \theta = \ln\left(2 + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$
$$\varphi''(\theta) = \frac{\sqrt{a}}{\left(e^{T-\theta} + \sqrt{a}\right)^2} e^{T-\theta} > 0 \Rightarrow \min$$

$$\bar{x} = \frac{\sqrt{a}}{2 + 1/\sqrt{a}} < \frac{\sqrt{a}}{2}$$

Почему переключений управление с особого только один раз?
Рассмотрим задачу с зак. концом.

(1') (1) + $x(T) = x_1 < \sqrt{a}$ - куда надо прийти.

$T - \theta_1 = \ln \frac{\sqrt{a}}{x_1}$, θ_1 - ур переключения

$$\bar{u} = \begin{cases} 0, & t \in [0, \tau], \quad \tau = \frac{\sqrt{a} - x_0}{a} \\ u_3, & t \in (\tau, \theta_1] \\ 1, & t \in (\theta_1, T] \end{cases} \qquad T - \theta_1 = \ln \frac{\sqrt{a}}{x_1}, \quad T > \tau + \ln \frac{\sqrt{a}}{a}$$

$$\bar{x} = \begin{cases} x_0 + at, & [0, \tau] \\ \sqrt{a}, & (\tau, \theta_1] \\ \sqrt{a} e^{\theta_1 - t}, & (\theta_1, T] \end{cases}$$

Теорема 2. $(\bar{u}, \bar{x})$ – оптимальный процесс в задаче (I')

Д-во: $J = \int_0^T (-\frac{x}{1+x}) u \, dt = \int_0^T (-\frac{x}{1+x} u + \dot{w}_{(T)} - \dot{w}_{(T)}) dt$

$$w(x) = -\int_0^x \frac{\xi \, d\xi}{(1+\xi)(a+\xi)}, \quad \dot{w}_{(T)} = -\frac{x}{(1+x)(a+x)} \cdot \dot{x} =$$

$$= w'(x)(a - (a+x)u)$$

$$J = -w(x(t))\Big|_{t=0}^{t=T} + \int_0^T (-\frac{xu}{1+x} - \frac{x(a-(a+x)u)}{(1+x)(a+x)}) dt =$$

$$= -w(x_1) + w(x_0) + \int_0^T (-\frac{xu}{1+x} - \frac{ax}{(1+x)(a+x)} + \frac{x}{1+x}) dt$$

$$= -w(x_1) + w(x_0) + a \int_0^T w'(x(t)) dt$$

Рассмотрим другую пару $(\hat{u}, \hat{x})$

$$J(\hat{u}) - J(\bar{u}) = a \int_0^{\cdot} [w'(\hat{x}(t)) - w'(\bar{x}(t))] dt \ge$$

$$w' = -\frac{x}{(1+x)(a+x)}; \qquad w'(0) = 0, \quad w'(\infty) = 0$$

$$w'' = \frac{x^2 - a}{(1+x)^2 (a+x)^2} \qquad w'(x) < 0, \quad x > 0$$

$\Rightarrow x = \sqrt{a}$ – min w'

$$\ge a \left[\int_0^{\tau} + \int_{\tau}^{\theta_1} + \int_{\theta_1}^{\cdot} \right] \ge 0$$

≥ 0 ≥ 0 ≥ 0

1) $\hat{x} \le \bar{x} = x^+ \Rightarrow w'(\hat{x}) \ge w'(\bar{x})$